Majorisierung und Spektraleigenschaften positiver Operatoren auf Banachverbänden

Dissertation

der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
vorgelegt von

Ulrich Moustakas
aus
Schwäbisch Gmünd
1984

Majorisierung und Spektraleigenschaften positiver Operatoren auf Banachverbänden

Dissertation

der Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
vorgelegt von

Ulrich Moustakas
aus
Schwäbisch Gmünd
1984

Tag der mündlichen Qualifikation: 30.11.1984
Dekan: Prof. Dr. W. Kaup

1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. H. Schaefer
2. Berichterstatter: Prof. Dr. R. Nagel

Meinen Eltern in Dankbarkeit

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung 1

1. Eine "endlichdimensionale Vorbetrachtung": Majorisierung bei positiven Matrizen. 6

2. Terminologie und vorbereitende Resultate. 19

3. Majorisierung und Inklusionsbeziehungen für die peripheren Spektren. 27

4. Majorisierung und eine Ungleichung für die Dimensionen der Eigenräume. 66

5. Majorisierung und isolierte Singularitäten der Resolvente. 73

6. Folgerungen für das asymptotische Verhalten des majorisierenden Operators. 104

Literaturverzeichnis 111

EINLEITUNG

Spektraltheoretische Eigenschaften positiver Matrizen sind seit den bekannten Arbeiten von Perron (1907) und Frobenius (1908, 1909, 1912) untersucht worden. Bisher kaum berührt scheint dagegen die Fragestellung zu sein, welche Implikationen eine Majorisierungsrelation der Form $0 \leq S \leq T$ zweier positiver Matrizen für die Beziehung der Spektren von S und T nach sich zieht. Eine derartige Untersuchung haben wir mit der Arbeit [16] begonnen. Dabei stellte sich heraus, daß sich einige Aussagen bezüglich der peripheren, d.h. der auf dem jeweiligen Spektralkreis gelegenen, Spektren recht einfach herleiten lassen. Da die Perron-Frobenius-Resultate später im wesentlichen auch für positive Operatoren auf Banachverbänden, eine natürliche Erweiterung des Konzepts der positiven Matrizen, nachgewiesen werden konnten (siehe [27], Chapt.5), erscheint es reizvoll, die Untersuchung der im endlichdimensionalen Fall so einfach zu erhaltenden Ergebnisse auch in beliebigen Banachverbänden durchzuführen. Dies soll in der vorliegenden Arbeit geschehen, die sich folgendermaßen gliedert:

Im ersten Kapitel zunächst soll zu den später untersuchten Fragestellungen hingeführt werden und zwar durch Betrachtung des Falles zweier positiver Matrizen. Dazu wird ein kurzer Einblick in die in [16] gewonnenen Ergebnisse vermittelt. Es zeigt sich folgende Situation:

S und T seien positive Matrizen mit $r(S), r(T) > 0$ und es gelte $S \leq T$. Ist wenigstens T irreduzibel, so folgt die Inklusion

$$r(T)^{-1} \cdot \pi\sigma(T) \subset r(S)^{-1} \cdot \pi\sigma(S)$$

für die peripheren Spektren $\pi\sigma(S)$ bzw. $\pi\sigma(T)$ von S bzw. T. Auf die Irreduzibilität von T kann dabei nicht ohne weiteres verzichtet werden, wie durch einfache Beispiele bereits belegt wird. Allerdings läßt sich diese Voraussetzung an T ersetzen durch die Annahme, daß S und T strikt positive Eigenvektoren besitzen. In dieser Situation können dann außerdem auch die Dimensionen von Eigenräumen zu peripheren Eigenwerten direkt miteinander verglichen werden: es gilt nämlich

$$\dim \operatorname{Ker}(\alpha \cdot r(T) - T) \leq \dim \operatorname{Ker}(\alpha \cdot r(S) - S)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$.

Nachdem im zweiten Kapitel wichtige Begriffe geklärt und einige später verwendete Resultate aus der Operatorentheorie zusammengestellt sind, gehen wir im dritten Kapitel dann daran, die für positive Matrizen gewonnenen Ergebnisse auch für positive Operatoren auf Banachverbänden zu untersuchen. Dieser Abschnitt macht, wie schon am Umfang zu erkennen ist, den Hauptteil der vorliegenden Arbeit aus. Dies liegt zum einen daran, daß die oben

genannte Inklusionsbeziehung für die peripheren Spektren in unendlichdimensionalen Räumen auf eine Fallunterscheidung führt: Gleichheit der Spektralradien $r(S)$ und $r(T)$ einmal vorausgesetzt, steht dann nicht nur die Inklusion $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$ zur Debatte, sondern etwa auch $\pi p\sigma(T) \subset \pi p\sigma(S)$ oder $\pi p\sigma(T') \subset \pi p\sigma(S')$, wenn mit $\pi p\sigma(.)$ die jeweiligen peripheren Punktspektren bezeichnet werden. Zum andern können die Beweise nicht wie die typisch "endlichdimensionalen Argumente" im ersten Kapitel gewählt werden, sondern hier finden die für die Spektraltheorie positiver Operatoren entwickelten Techniken (siehe z.B. [27], Chapt.5) ihre Anwendung.

Doch immerhin erweist sich die Orientierung an den im endlichdimensionalen Fall getroffenen Voraussetzungen noch als fruchtbar; so werden z.B. aus den stochastischen Matrizen dann Markoff-Operatoren auf $C(X)$ oder - auf beliebigen Banachverbänden - positive Operatoren mit quasi-inneren Fixpunkten und Spektralradius 1, und unter derartigen Voraussetzungen gelingt dann tatsächlich die Herleitung der oben erwähnten Inklusionsbeziehungen, so daß das mit diesem Kapitel verfolgte Ziel als erreicht gelten kann. Verschiedene Beispiele und Gegenbeispiele dienen dabei zur Verdeutlichung der Aussagen.

Diese Ergebnisse werden dann anschließend dadurch ergänzt, daß wir noch untersuchen, in wieweit sich auch die oben genannte Aussage über den Vergleich von Dimensionen entsprechender Eigenräume auf den Fall beliebiger Banachverbände übertragen läßt. Auch hier zeigen sich positive

Zum Abschluß unserer Arbeit bietet es sich an, die bisher bewiesenen Aussagen noch in folgender Hinsicht auszuwerten: asymptotisches Verhalten eines positiven Operators (gemeint ist etwa Konvergenz der Potenzen oder der Césaro-Mittel) läßt sich bekanntlich charakterisieren durch Spektraleigenschaften, welche peripheres Spektrum oder Resolvente betreffen. Ziel des sechsten Kapitels ist es daher, (nur) die unmittelbare Anwendung der vorigen Ergebnisse in der Frage der Asymptotik zu testen. Mit dieser Verbindung zwischen dem dritten und fünften Kapitel schließt unsere Arbeit.

Herrn Prof. Dr. H.H. Schaefer möchte ich danken für die Anregung zu dieser Arbeit und für ihre Betreuung.

1. EINE "ENDLICHDIMENSIONALE VORBETRACHTUNG": MAJORISIERUNG BEI POSITIVEN MATRIZEN

Wie in der Einleitung bereits angekündigt wurde, soll dieses erste Kapitel als Einführung in die Thematik der vorliegenden Arbeit dienen und zwar im Sinne einer Motivation der nachfolgenden Untersuchungen in unendlichdimensionalen Räumen. Das heißt, es soll bei unserem Studium von Implikationen einer Majorisierungsrelation $S \leq T$ zweier (positiver) Operatoren eine gewisse Richtung von zu erwartenden Ergebnissen hier überhaupt erst einmal motiviert werden (Natürlich wird eine grobe Richtung allein dadurch schon eingeschlagen, daß wir uns die Untersuchung spektraltheoretischer Eigenschaften zum Ziel gesetzt haben).

Um gleich konkreter zu werden, wenden wir uns dem Untersuchungsgegenstand näher zu, nämlich dem peripheren Spektrum positiver Matrizen und zwar zunächst irreduzibler positiver Matrizen. Ist S eine solche Matrix und $r(S) = 1$, so ist ihr peripheres Spektrum, welches mit $\pi\sigma(S)$ bezeichnet wird, eine Gruppe von Einheitswurzeln ([27], I.6.5). So ist z.B. für irreduzible Permutationsmatrizen auf $\mathbb{C}^n$ das periphere Spektrum gerade die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln. Da S primitiv genannt wird, falls $\pi\sigma(S) = \{1\}$ gilt, bietet es sich an, im allgemeinen Fall die Gruppenordnung von $\pi\sigma(S)$ als Imprimitivitätsindex von S zu benennen und etwa mit $i(S)$ abzukürzen, was wir im folgenden auch tun wollen (ist $r(S) > 0$ und

$r(S) \neq 1$, so sei $i(S)$ einfach die Ordnung von $\pi\sigma(r(S)^{-1} \cdot S))$.

Ist nun eine irreduzible positive Matrix gegeben, so kann $i(S)$ interessanterweise auf die folgende Art charakterisiert werden: für jeden Index $j \in \{1,\ldots,n\}$ ist $i(S)$ der größte gemeinsame Teiler all der natürlichen Zahlen k, für die das Diagonalelement $(S^k)_{jj}$ der k-ten Potenz von S positiv ist, d.h. von Null verschieden (siehe z.B. [29], Theorem 1.7, oder auch [3], Chapt.2,Theorem (2.30)). Wenn jetzt T eine weitere irreduzible positive Matrix bezeichnet und die in Rede stehende Relation $S \leq T$ vorausgesetzt wird, so folgt natürlich für jeden Index $j \in \{1,\ldots,n\}$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung $(S^k)_{jj} \leq (T^k)_{jj}$. Der größte gemeinsame Teiler all der $k \in \mathbb{N}$, für die $(T^k)_{jj} > 0$ gilt - nach dem oben Gesagten ist dies gerade $i(T)$ -, teilt dann auch alle $k \in \mathbb{N}$, für die $(S^k)_{jj} > 0$ ist (ausdrücklich: weil

$$\{k \in \mathbb{N}: (S^k)_{jj} > 0\} \subset \{k \in \mathbb{N}: (T^k)_{jj} > 0\}$$

gilt) und daher auch ihren größten gemeinsamen Teiler $i(S)$. Somit ist bereits das folgende Resultat gefunden (die Normierung der beiden Spektralradien auf 1 dient nur dazu, die Beziehung zwischen den peripheren Spektren am einfachsten und aussagekräftigsten zu notieren).

1.1 Satz (siehe auch [16], (2.4)). S und T seien irreduzible positive Matrizen, $r(S) = r(T) = 1$ und $S \leq cT$ für eine reelle Zahl c. Dann gilt $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$.

Beweis. Nach den obigen Ausführungen ist $i(cT)$ ein Teiler von $i(S)$. Aus $\sigma(cT) = c\sigma(T)$ und der Definition des Imprimitivitätsindex folgt aber $i(T) = i(cT)$. Also ist $\pi\sigma(T)$ eine Untergruppe von $\pi\sigma(S)$.

Nachdem sich diese Beziehung so einfach ergeben hat, kann man wohl mit Recht erwarten, noch gewisse Verbesserungen davon zu erreichen. Die nachfolgenden Bemerkungen allerdings sollen verdeutlichen, daß diese Verbesserungen nicht in Richtung einer Erweiterung der Inklusionsbeziehung oder Verschärfung zur Gleichheit zu erwarten sind. Was dann noch bleibt ist eine Untersuchung des genauen Gültigkeitsbereichs der Inklusion $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$, d.h. die Frage: wieweit können die dazu gemachten Voraussetzungen abgeschwächt werden? Dieser Frage ist dieses und für den allgemeinen Fall dann das dritte Kapitel gewidmet.

Einfache Beispiele wie etwa das der Matrizen

$$S := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ mit } \sigma(S) = \{-1,1\} \text{ und } T := 0{,}5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mit $\sigma(T) = \{0,1\}$ zeigen bereits, daß unter den Voraussetzungen von (1.1) i.a. nicht mit der Gültigkeit einer Inklusionsbeziehung für die gesamten Spektren zu rechnen ist; es handelt sich in (1.1) also um eine typische Eigenschaft des auf dem Spektralkreis liegenden Teiles des Spektrums.

Und im übrigen ist die bewiesene Inklusion i.a. echt, was wir direkt an diesem Beispiel erkennen können. Dies ist eigentlich auch zu erwarten; denn nach [27], I.6.5 Cor.2 ist eine irreduzible positive Matrix primitiv (d.h. ihr peripheres Spektrum besteht lediglich aus dem Spektralradius), falls eine ihrer Diagonalkomponenten von Null verschieden ist. Mit anderen Worten: die positive Störung einer irreduziblen positiven Matrix in einer ihrer Diagonalkomponenten reduziert das periphere Spektrum auf den Spektralradius.

Eine weitere Analyse zeigt, daß in der Situation von (1.1) genau dann Gleichheit der peripheren Spektren vorliegt, wenn T die $i(S)$ minimalen $S^{i(S)}$-Ideale invariant läßt. Etwas grob ausgedrückt läßt sich also folgendes sagen: je größer das periphere Spektrum von S ist, desto "unwahrscheinlicher" wird die Gleichheit der peripheren Spektren von S und T. Daher wird im folgenden auf diesen uninteressant erscheinenden Fall der Gleichheit nicht weiter eingegangen. Die Details und auch eine entsprechende Situation im unendlichdimensionalen Fall werden in [16] behandelt.

Auch finden sich leicht Gegenbeispiele zu (1.1), falls die Irreduzibilität von S und T nicht mehr verlangt wird, wie z.B. bei

$$S := \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

denn hier ist $\pi\sigma(S) = \{1\}$, aber $\pi\sigma(T) = \{-1,1\}$.

Doch läßt sich der Gültigkeitsbereich der Inklusion $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$ durchaus noch erweitern und zwar zunächst für den Fall, daß nur T (und nicht auch S) als irreduzibel vorausgesetzt wird. Erreicht wird dies in gewissem Sinne durch eine Reduktion auf die Situation von (1.1). Eine positive Matrix S kann nämlich durch eine Permutation ihrer Zeilen und Spalten auf eine solche Dreiecks-Block-Gestalt gebracht werden, daß jeder Diagonalblock S_i gerade eine irreduzible Untermatrix ist (siehe z.B. [27], I.8.8 und die sich daran anschließenden Bemerkungen). Also ist für eine geeignete Permutationsmatrix P

$$P \cdot S \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} S_1 & & & * \\ 0 & S_2 & & \\ 0 & 0 & S_3 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 \ \cdots & S_m \end{bmatrix} ,$$

und hier stehen in der Hauptdiagonale nur irreduzible quadratische Matrizen (für $n = 1$ ist jede Matrix auf $\mathbb{C}^n$ irreduzibel), und alle Komponenten unter dieser Hauptdiagonale sind Null. Solch eine Permutationsmatrix läßt als Ähnlichkeits-Transformation natürlich das Spektrum der Matrix invariant. Sind also $S,T \geq 0$ gegeben und ist $S \leq T$ und T irreduzibel, so kann für S ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine Dreiecks-Block-Gestalt angenommen werden. Für jede irreduzible zu einem Diagonalblock von S gehörende $n_i \times n_i$ - Untermatrix S_i und einen jeden ihrer n_i Indizes j_i gilt $(S_i^k)_{j_i j_i} \leq (T^k)_{j_i j_i}$ für jede natürliche Zahl k; nach der vor (1.1) angeführten Charakterisierung des Imprimitivitätsindex hat dies dann zur Folge, daß $i(T)$ ein Teiler von $i(S)$ ist. Das Spektrum von S ist aber (aufgrund der Dreiecksgestalt von S) die Vereinigung der Spektren der Untermatrizen S_i (welche ja in der Diagonale von S stehen); daher ist $\pi\sigma(S)$ die Vereinigung aller Mengen $\pi\sigma(S_i)$ mit $r(S_i) = r(S)$. Für alle diese gilt jedoch $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S_i)$. Damit haben wir folgenden Sachverhalt gezeigt.

1.2 Satz (siehe auch [16], (3.2)). S und T seien positive Matrizen mit $r(S) = r(T) = 1$, weiter sei T irreduzibel und $S \leq cT$ für eine reelle Zahl c. Dann gilt $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$.

Um noch einen Schritt weiterzukommen, kehren wir zunächst wieder zu der oben erwähnten Normalform einer positiven

Matrix zurück: sei $S \geq 0$ in Dreiecks-Block-Gestalt gegeben. Die Teilmenge C_i von $C := \{1,\ldots,n\}$, welche gerade die Indexmenge der irreduziblen Untermatrix S_i der Diagonale von S ist, wird dann die zu S_i gehörende Klasse genannt. Folgende Redeweise wird nun eingeführt:

Klasse C_i hat Zugang zur Klasse C_j, falls es $p \in C_i$, $q \in C_j$ und ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $(S^k)_{pq} > 0$. Weiter soll eine Klasse final (oder ergodisch, vgl. [27]) heißen, falls sie zu keiner anderen Klasse Zugang hat, im andern Falle transient.

Die Eigenschaft einer Teilmenge A von $\{1,\ldots,n\}$, gerade die Indexmenge einer irreduziblen Untermatrix der Diagonale zu sein, wird in dieser Ausdrucksweise dann so charakterisiert, daß alle Elemente von A wechselseitig Zugang zueinander haben. Damit sind wir im Besitz geeigneter Begriffsbildungen, um die Inklusion $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$ schließlich auch für den Fall zweier stochastischer Matrizen beweisen zu können.

Sei also S eine stochastische Matrix. Nach [27], I.9.3 und I.3.5 gilt für jede transiente Klasse C_i $r(S_i(C_i)) < 1$ ($S_i(C_i)$ bezeichne die zu C_i gehörende irreduzible Untermatrix von S) und demzufolge $r(S_j(C_j)) = 1$ für jede finale Klasse.
Als nächstes ist zu bemerken, daß jede transiente Klasse C_i Zugang zu einer finalen Klasse hat: jede transiente

Klasse hat nämlich Zugang zu einer anderen Klasse; aus der Transitivität der Relation des "Zugang Habens" und der Bemerkung, daß verschiedene Klassen nicht wechselseitig Zugang zueinander haben können (sonst würde es sich ja nur um eine Klasse handeln) folgt also die obige Behauptung. Damit können wir nun das folgende Resultat beweisen.

1.3 Satz (siehe auch [16], (3.7)). S und T seien stochastische Matrizen, und es sei $S \leq cT$ für eine reelle Zahl c. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$.

(b) $\dim \mathrm{Ker}(\mu - T) \leq \dim \mathrm{Ker}(\mu - S)$ für alle $\mu \in \mathbb{C}, |\mu| = 1$.

Beweis. (a) Sei C_i eine finale Klasse von T. Wegen $S \leq cT$ gibt es dann eine Klasse C_j von S, welche in C_i enthalten ist (Klassen können nur anwachsen, falls die Matrix "positiver" wird). Nach den obigen Ausführungen hat C_j aber Zugang zu einer finalen Klasse C_k von S (eventuell ist $j = k$). Da eine Klasse aber, wie bereits erwähnt, dadurch charakterisiert wird, daß alle ihre Indizes paarweise Zugang zueinander haben, muß C_k in C_i enthalten sein. Somit ist gezeigt: jede finale Klasse von T enthält eine finale Klasse von S. Für die zugehörigen irreduziblen Untermatrizen $T_i(C_i)$ bzw. $S_k(C_k)$ gilt nach (1.2) aber $\pi\sigma(T_i(C_i)) \subset \pi\sigma(S_k(C_k))$. Da für jede stochastische Matrix ihr peripheres Spektrum gleich der Vereinigung der peripheren Spektren aller

ihrer zu finalen Klassen gehörenden Untermatrizen ist, folgt nunmehr die Gültigkeit der Aussage (a).

(b) Jeder periphere Eigenwert einer stochastischen Matrix ist ein Pol erster Ordnung der Resolvente ([27], Bemerkung nach I.4.2), also stimmen die entsprechenden geometrischen und algebraischen Vielfachheiten eines solchen Eigenwerts überein. Nach [8], Chapt. 4, Theorem 3.2 läßt sich die Dimension des Eigenraums zum peripheren Eigenwert μ von T also folgendermaßen charakterisieren: $\dim \mathrm{Ker}(\mu - T)$ ist gleich der Anzahl aller finalen Klassen C_i von T, für die $\mu \in \pi\sigma(T_i(C_i))$ gilt. Da verschiedene Klassen stets disjunkt sind, folgt somit Behauptung (b).

Ein Vektor $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n$ heißt strikt positiv, wenn x_i positiv ist für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$. Für jede positive Matrix $S \geq 0$, welche einen strikt positiven Eigenvektor besitzt - nach [27], I.2.3 Cor. gehört dieser zum Spektralradius $r(S) > 0$ - ist $r(S)^{-1} \cdot S$ ähnlich zu einer stochastischen Matrix ([3], Chapt.2, Theorem (5.3)). Deshalb gelten die Aussagen (a) und (b) von (1.3) auch allgemein für positive Matrizen mit strikt positiven Eigenvektoren. Da irreduzible Matrizen diese Voraussetzung stets erfüllen ([27], I.6.2), enthält diese Modifizierung von (1.3) also noch Satz (1.1).

Es wurde oben darauf hingewiesen (siehe das Beispiel Seite 10), daß die Inklusion $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$ für beliebige

positive Matrizen nicht zu gelten braucht. Ähnlich ist es mit der in (1.3)(b) behaupteten Ungleichung für die Dimensionen entsprechender Eigenräume. Dies wird schon am folgenden Beispiel ersichtlich:

$$\text{Sei} \quad S := \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Offensichtlich ist $\dim \mathrm{Ker}(1-T) = 2$, aber $\dim \mathrm{Ker}(1-S) = 1$.

Ein zusätzliches Problem ist die Frage nach einer entsprechenden Ungleichung für die Polordnungen. In (1.1) bis (1.3) und auch in dem eben betrachteten Beispiel ist jeder periphere Eigenwert von T ein Pol erster Ordnung der Resolvente, weshalb eine Gleichung $\nu(\mu,T) \leq \nu(\mu,S)$ in diesen Fällen stets trivialerweise richtig ist ($\nu(\mu,T)$ bezeichne die Ordnung des Pols μ der Resolvente von T, analog für S). Im allgemeinen jedoch läßt sich dies nicht verifizieren. Ist nämlich

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

so gilt $\nu(1,T) = 2 > 1 = \nu(1,S)$. Aber auch die umgekehrte Relation ist i.a. nicht gegeben, wie das Beispiel

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mit $\nu(1,T) = 1$ und $\nu(1,S) = 2$ zeigt. Als typisch endlichdimensionales Ergebnis wollen wir deshalb zum Abschluß dieser Einführung noch eine Formel angeben, welche Polordnung und Dimension des Eigenraums miteinander verknüpft. Die beim Beweis benutzten Resultate samt ihrer Terminologie sollen hier allerdings der Ökonomie halber nicht noch extra eingeführt werden, sondern dazu wird auf [3], Chapt.2, (3.16)-(3.29) bzw. [18] bzw. [20] verwiesen, wo die Hilfsmittel für unseren Beweis bereitgestellt sind.

1.4 Satz. S und T seien $n \times n$-Matrizen mit $r(S) = r(T) = 1$ und $S \leq cT$ für eine reelle Zahl c, und $m(\lambda)$ sei die algebraische Vielfachheit von $\lambda \in \sigma(S)$.
Ist $(||T^m||)_{m \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so gilt

$$\nu(1,S) + \dim \operatorname{Ker}(1-T) \leq 1 + \sum_{\lambda \in \sigma(S) \cap \mathbb{R}_+} m(\lambda) \leq n + 1.$$

Beweis. Nach Theorem 3.1(1) von [20] ist $\dim \operatorname{Ker}(1-T)$ die Anzahl aller Hauptklassen ("basic classes") von T, denn 1 ist Pol erster Ordnung von T ([27], I.3.4). Zudem hat keine dieser Hauptklassen Zugang zu einer andern ([20], Cor. 3.4).

Dagegen ist $\nu(1,S)$ die Anzahl der Hauptklassen in der längsten Kette von S ([20], Theorem 3.1(2)); von je zweien hat also wenigstens eine davon Zugang zur andern. Wegen $S \leq cT$ können daher nicht verschiedene Hauptklassen einer solchen Kette von S in verschiedenen Hauptklassen von T enthalten sein (denn sonst hätten diese ja auch Zugang zueinander, was oben jedoch gerade ausgeschlossen wurde). Es kann sich also höchstens um eine einzige Hauptklasse von T handeln, die Hauptklassen von S enthält. Alle andern Hauptklassen von T sind somit zu allen Hauptklassen von S paarweise disjunkt; damit ist also $\dim \mathrm{Ker}(1-T) - 1 + \nu(1,S)$ höchstens gleich der Anzahl der in einer Zerlegung von T vorkommenden Klassen überhaupt.

Aber jede Untermatrix von T, die einer dieser Klassen entspricht, besitzt einen nichtnegativen Eigenwert ([27], I.2.3) und dieser ist auch Eigenwert von T. Also ist $\dim \mathrm{Ker}(1-T) - 1 + \nu(1,S)$ höchstens gleich der Anzahl der nichtnegativen Eigenwerte von T, gezählt nach algebraischen Vielfachheiten.

Bemerkung. Gleichheit kann in (1.4) tatsächlich auftreten. Als triviales Beispiel dient der Fall, wo S und T die Einheitsmatrix auf $\mathbb{C}^n$ bezeichnen. Ein anderes Beispiel liefern die Matrizen

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T := \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Hier ist $\nu(1,S) + \dim \mathrm{Ker}(1-T) = 2 + 1 = 3$.

2. TERMINOLOGIE UND VORBEREITENDE RESULTATE

Hier wollen wir einige für die nächsten Kapitel wichtigen Begriffe klären und zudem einige der benötigten Hilfsmittel vorwegnehmen. Im übrigen ist, was die Theorie der Banachverbände und positiven Operatoren anbetrifft, [27] unsere Hauptreferenz. Grundsätzlich sei E ein komplexer Banachverband (siehe [27], Chapt. II, §11) und $\mathcal{L}(E)$ der Banachraum aller stetigen linearen Operatoren auf E. Der Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ heißt dann positiv, in Zeichen $T \geq 0$, falls T den positiven Kegel E_+ von E invariant läßt. Ist T positiv und von Null verschieden, so wird hierfür auch $T > 0$ geschrieben; die Bezeichnungen $S \leq T$ bzw. $S < T$ für einen weiteren (positiven) linearen Operator S bedeuten dann $T - S \geq 0$ bzw. $T - S > 0$. Ist $E = C(X)$ der Raum der (komplexwertigen) stetigen Funktionen auf dem kompakten Hausdorff-Raum X, so heißt $T > 0$ Markoff-Operator, falls T die konstante Einsfunktion invariant läßt, und Sub-Markoff-Operator, falls $r(T) = ||T|| = 1$ gilt.

Sei nun $T \in \mathcal{L}(E)$. Dann bezeichnet $r(T)$ den Spektralradius und $\pi\sigma(T)$ das periphere Spektrum von T, d.h. die Menge aller Spektralwerte, die vom Betrag $r(T)$ sind; $\pi p\sigma(T)$ ist dann das periphere Punktspektrum von T, also die Menge aller Eigenwerte vom Betrag $r(T)$. Wie üblich wird das approximative Punktspektrum mit $a\sigma(T)$ abgekürzt.

Im folgenden werden wir häufig diese Situation antreffen: F ist ein abgeschlossener Teilraum von E und invariant unter T. Dann definiert die Einschränkung von T auf F einen Operator $T_1 \in \mathcal{L}(F)$ und durch die Vorschrift $T_2(q(x)) = q(Tx)$ für jedes $x \in E$ ist ein Operator $T_2 \in \mathcal{L}(E/F)$ gegeben ($q: E \to E/F$ ist hier die kanonische Quotientenabbildung). Von den folgenden spektralen Beziehungen zwischen T, T_1 und T_2 wollen wir dann Gebrauch machen (ρ_∞ bezeichnet die unbeschränkte Zusammenhangskomponente der Resolventenmenge ρ):

$$\sigma(T) \subset \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2), \tag{2.1}$$

$$\rho_\infty(T) \subset \rho(T_1) \cap \rho(T_2), \tag{2.2}$$

([27], Chapt.V, Exc. 5(a),(b)). Im Falle $r(T_2) = r(T)$ (bzw. $r(T_1) = r(T)$) folgt hieraus

$$\pi\sigma(T_2) \subset \pi\sigma(T) \quad \text{(bzw. } \pi\sigma(T_1) \subset \pi\sigma(T)\text{)}. \tag{2.3}$$

Klar ist außerdem auch die Inklusion

$$p\sigma(T_1) \subset p\sigma(T), \tag{2.4}$$

und die Betrachtung dieses Falles in E' ergibt

$$p\sigma(T_2') \subset p\sigma(T'), \tag{2.5}$$

denn es ist $T_2' = T'|_{F^\circ}$ und $T_1' = T'/F^\circ$, wenn F° die Polare von F und T'/F° den von T' auf E/F° induzierten Operator bezeichnet.
Aus (2.1) und (2.2) läßt sich zudem die Beziehung

(2.6) $r(T) = \max\{r(T_1), r(T_2)\}$

erkennen.
Nun sei G ein weiterer abgeschlossener Teilraum von E, invariant unter T und enthalten in F. Wird die Einschränkung von T auf G mit T_3 abgekürzt, so erhalten wir die Ungleichung

(2.7) $r(T_3) \leq r(T_2)$,

und zwar einfach dadurch, daß in (2.5) T_1 statt T, T_3 statt T_1 und T_1/G statt T_2 gesetzt wird.

Außerdem werden wir auch folgenden Sachverhalt benützen ([21], 3.Cor 2): Sei μ_o isoliert im Komplement von $\rho_\infty(T)$.

(2.8) Ist μ_o Pol von $R(\mu,T)$ der Ordnung k, so ist μ_o auch Pol von $R(\mu,T_1)$ und $R(\mu,T_2)$ der Ordnung höchstens k.
Ist μ_o Pol von $R(\mu,T_1)$ der Ordnung k_1 und Pol von $R(\mu,T_2)$ der Ordnung k_2, dann ist μ_o auch Pol von $R(\mu,T)$ der Ordnung höchstens $k_1 + k_2$.

Wir werden diese Resultate allerdings in der speziellen Situation anwenden, wo E ein Banachverband, T ein positiver linearer Operator auf E und F ein abgeschlossenes Ideal von E ist; dann nämlich ist auf kanonische Weise auch E/F ein Banachverband ([27], II.2.6). Abgeschlossene und unter T invariante Ideale von E werden übrigens als T-Ideale bezeichnet und T heißt irreduzibel, falls $\{0\}$ und E die einzigen T-Ideale sind ([27], III.8.1).

Nun wird T als positiver Operator vorausgesetzt. Für später (z.B. in (4.1) und (5.13)) ist dann diese Bemerkung nützlich:

(2.9) Ist $r(T) = 1$ Pol von $R(\mu,T)$ und $Tu \leq u$ für einen quasi-inneren Punkt $u \in E_+$, so ist 1 Pol erster Ordnung.

Hierbei heißt u quasi-innerer Punkt von E_+, falls das von u in E erzeugte Ideal dicht in E liegt ([27], II.6.1). Unsere Behauptung sieht man nun wie folgt ein: da $r(T)$ im Spektrum von T liegt ([27],V.4.1), beträgt die Polordnung mindestens 1. Sie werde mit n bezeichnet. Das zugehörige Residuum $Q := \lim_{\mu \downarrow 1} (\mu-1)^n \cdot R(\mu,T)$ ist ein positiver Operator, und es gilt

$$Qu = \lim_{\mu \downarrow 1} (\mu-1)^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} \cdot T^k u \leq$$

$$u \cdot \lim_{\mu \downarrow 1} (\mu-1)^n \cdot \mu \cdot (\mu-1)^{-1} = u \cdot \lim_{\mu \downarrow 1} \mu \cdot (\mu-1)^{n-1}.$$

Wäre nun $n > 1$, so würde $Qu = 0$ folgen und daher $Q = 0$, da u ja als quasi-innerer Punkt vorausgesetzt wurde. Dies würde aber im Widerspruch zu $1 \in \sigma(T)$ stehen (die Resolvente kann in 1 nicht holomorph sein). Somit erhalten wir $n = 1$.

Weiterhin sei T positiv und $r(T) = 1$.

(2.10) Ist 1 Pol von $R(\mu,T)$, so existiert ein positiver Fixvektor für T ([23], Proposition 4).

(2.11) Ist $E = C(X)$ der Banachverband aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorff-Raum X, so existiert ein positiver Fixvektor für T' ([24], App. 2.6 Cor.).

Bei der Formulierung unserer Ergebnisse wollen wir auch die folgende Äquivalenz benützen. Wie üblich heißt T dabei gleichmäßig mittelergodisch, falls die Cesaro-Mittel $T_n = 1/n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} T^k$ in der Operatornormtopologie konvergieren.

(2.12) Sei $r(T) = 1$. Genau dann ist T gleichmäßig mittelergodisch, wenn 1 Pol erster Ordnung von $R(\mu,T)$ ist.

Der Beweis ist enthalten in [7], Theorem 5 und Theorem 6.

Ein anderes Resultat, das wir der Übersichtlichkeit halber hier vorwegnehmen wollen, bezieht sich auf den Fall $E = C(X)$ (X ein kompakter Hausdorff-Raum).

(2.13) Sind $H_1,\dots,H_r$ ($r \in \mathbb{N}$) maximale T-Ideale ([27], III.8.1) und ist $H_o = \bigcap_{i=1}^{r} H_i$, so ist E/H_o isomorph mit $\oplus_{i=1}^{r} E/H_i$.

Zum Beweis dieser Tatsache berücksichtigen wir zunächst, daß es zu jedem $i \in \{0,\dots,r\}$ eine abgeschlossene Teilmenge A_i von X gibt mit der Eigenschaft $H_i = \{f \in C(X) : f(A_i) \subset \{0\}\}$, $i = 0,\dots,r$ ([27], Chapt. III, §1, Ex.1). Des weiteren ist E/H_i isomorph mit $C(A_i)$. Die Mengen A_i, $i = 1,\dots,r$, sind aber paarweise disjunkt ([25], Proposition 3). Also ist offensichtlich $C(A_o)$ isomorph $\oplus_{i=1}^{r} C(A_i)$ und damit E/H_o isomorph $\oplus_{i=1}^{r} E/H_i$.

Zum Schluß wollen wir noch die nachstehenden häufig benützten Konstruktionen einführen:

(2.14) E_u und (E,ϕ).

E sei ein Banachverband und $u \in E_+$. Dann ist das von u in E erzeugte Ideal E_u, versehen mit der vom Intervall $[-u,u]$ induzierten Norm, ein AM-Raum ([27], II.7.2, Cor.) und daher isomorph mit einem Raum $C(X)$, X kompakt ([27], II.7.4).
Weiter sei $\phi \in E'$ eine positive Linearform und N ihr absoluter Kern $\{x \in E : \phi(|x|) = 0\}$. Dann ist E/N unter der vermöge $p_\phi(\hat{x}) := \phi(|x|)$ $(x \in \hat{x} \in E/N)$ gegebenen Norm L-normiert und die Komplettierung $(E,\phi) := (E/N,p_\phi)^\sim$ somit ein AL-Raum ([27], Chapter II, §8, Ex. 1).
Folgender Zusammenhang ist hier für uns noch wichtig: wird u vermöge der kanonischen Auswertungsabbildung $E \to E''$ als Element von E'' betrachtet, so daß die Räume E''_u und (E',u) wohldefiniert sind, dann ist E''_u isomorph mit dem Dual von (E',u) ([27], Chapter IV, Exc. 9(a)).

(2.15) F-Produkt $\hat{E}_F$ (siehe [27], Chapt. V, §1).

Sei E ein Banachverband und F ein Filter auf $\mathbb{N}$, welcher feiner ist als der Frêchet-Filter. Ist $m(E)$ der Banachverband aller beschränkten E-wertigen Folgen (unter der Supremumsnorm und komponentenweiser Ordnung) und $c_F(E)$ das Ideal in E aller Folgen (x_n), für die $\lim_F ||x_n|| = 0$ gilt, so wird der Quotient $m(E)/c_F(E)$ als F-Produkt von E bezeichnet und mit $\hat{E}_F$ abgekürzt.

Vermöge der kanonischen Einbettung $x \to (x,x,\ldots) + c_F(E)$, welche sogar ein Verbandsisomorphismus ist, wird E als Teilraum von $\hat{E}_F$ betrachtet.
Für $T \in \mathcal{L}(E)$ definiert dann die Vorschrift
$\hat{T}((x_n) + c_F(E)) := ((Tx_n) + c_F(E))$
einen Operator $\hat{T} \in \mathcal{L}(\hat{E}_F)$, und diese Zuordnung ist ein Ordnungsisomorphismus für die kanonischen Ordnungsrelationen auf $\mathcal{L}(E)$ und $\mathcal{L}(\hat{E}_F)$.

Für die Spektraltheorie ist nun die Gültigkeit der folgenden Eigenschaften von Bedeutung:

(a) $\sigma(T) = \sigma(\hat{T})$.

(b) $a\sigma(T) = a\sigma(\hat{T}) = p\sigma(\hat{T})$.

(c) $(\mu - T)^{-1})\hat{} = (\mu - \hat{T})^{-1}$ für alle $\mu \in \rho(T) = \rho(\hat{T})$.

Darüber hinaus ist $\mu_o \in \sigma(T)$ genau dann ein Pol der Ordnung k von $R(\mu,T)$, wenn μ_o ein Pol der Ordnung k von $R(\mu,\hat{T})$ ist (siehe [27], V.1.4).

Damit sind die Vorbereitungen für die folgenden Kapitel abgeschlossen, und wir kommen nunmehr zum eigentlichen Thema der Arbeit.

3. MAJORISIERUNG UND INKLUSIONSBEZIEHUNGEN FÜR DIE PERIPHEREN SPEKTREN

Im ersten Kapitel hatten wir für zwei positive Matrizen S und T mit $r(S) = r(T) = 1$, welche eine Majorisierungsrelation $S \leq cT$ für eine reelle Zahl c erfüllen, unter geeigneten zusätzlichen Voraussetzungen, etwa der Irreduzibilität von T ((1.2)) oder der Annahme, daß S und T stochastisch sind ((1.3)), die Beziehung $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$ für die peripheren Spektren beweisen können, und zwar relativ mühelos, d.h. ohne erheblichen technischen Aufwand. Ziel dieses Kapitels ist es nun zu untersuchen, in wieweit sich ähnliche Ergebnisse für den die obige Situation verallgemeinernden Fall positiver Operatoren auf einem Banachverband herleiten lassen (vgl. auch die Motivation dieser Inklusionsbeziehung im ersten Kapitel).

Vorab ist bezüglich unserer Formulierung des Problems vielleicht folgende Bemerkung noch hilfreich: der Vorzug in der Einführung der reellen Konstanten c in die erwähnte Majorisierungsrelation (c ist i.a. als ≥ 1 zu denken) gegenüber der zunächst zu erwartenden Ungleichung $S \leq T$ liegt einfach darin, daß so beide Spektralradien als auf 1 normiert angenommen werden können (positive Spektralradien vorausgesetzt, ohne die die in Frage stehende Relation trivial wird); dann nämlich ist es möglich, die peripheren Spektren $\pi\sigma(S)$ und $\pi\sigma(T)$ direkt auf Inklusion zu untersuchen, so daß es sich

vermeiden läßt, stets ihre homogenen Bilder $r(T)\cdot\pi\sigma(S)$ und $r(S)\cdot\pi\sigma(T)$ miteinander zu vergleichen; d.h. also, die Notation wird etwas einfacher (vgl. die Bemerkung vor (1.1)).

Eine weitere Bemerkung scheint noch angebracht: im ersten Kapitel waren es zwei positive Matrizen, deren Beziehung zueinander untersucht wurde, und die dort verwendete Methode läßt nicht auf einen Blick erkennen, ob Verbesserungen etwa in der Hinsicht zu erhalten sind, daß die majorisierte Matrix nicht notwendig als positiv vorausgesetzt werden muß. Anders ist es da bei dem hier zu behandelnden unendlichdimensionalen Fall. Die jetzt zum Ziel führende, ganz andere Methode lenkt sozusagen den Blick darauf, daß in der Tat der majorisierte Operator nicht positiv zu sein braucht. Beim Beweis von Lemma (3.1), dem Schlüsselergebnis für die weiteren Überlegungen, wird dies deutlich. Es zeigt sich nämlich, daß es für unsere Absicht genügt, die Beziehung $|Sz| \leq cTz$ für eine reelle Zahl c und alle z aus dem positiven Kegel des Banachverbandes E zu fordern. Wäre E ordnungsvollständig, so besäße jedes reguläre $S \in \mathscr{L}^r(E)$ einen Betrag ([27], IV.1.2), und anstatt der obigen Beziehung könnte $|S| \leq T$ gefordert werden (was die von uns verwendete Beziehung natürlich wieder impliziert). Da aber die Ordnungsvollständigkeit von E sowie die Regularität des majorisierten Operators S für die Art unserer Überlegungen zunächst nicht von Bedeutung sind, soll auf diese einschrän-

kenden Voraussetzungen verzichtet werden (vgl. aber auch (3.3) und die Ausführungen nach (3.9)).

Der Verlauf unserer Untersuchungen in diesem Kapitel ist orientiert an den Ergebnissen des ersten Kapitels. Zunächst wird der irreduzible Fall behandelt, d.h. für den majorisierenden Operator wird Irreduzibilität vorausgesetzt ((3.2) bis (3.4) und (3.9)). Hier schließen sich dann die Aussagen über Operatoren an, welche - etwas grob gesagt - quasiinnere Fixpunkte besitzen. Der Fall $E = C(X)$ findet dabei noch besondere Beachtung ((3.5) bis (3.8)). Zuletzt wird dann mit (3.12) die Verallgemeinerung des Falles zweier stochastischer Matrizen, die ja mit den eben genannten Resultaten begonnen wurde, noch vervollständigt.

Den Anfang bildet aber das bereits angekündigte Schlüssellemma.

3.1 Lemma. Sei E ein Banachverband, $0 \leq T \in \mathscr{L}(E)$ und $r(T) = 1$; sei x ein Eigenvektor von T zum peripheren Eigenwert α mit der Eigenschaft $T|x| = |x|$. Weiter erfülle $S \in \mathscr{L}(E)$ die Bedingung $|Sz| \leq cTz$ für alle $z \in E_+$ und eine reelle Zahl c. Unter diesen Voraussetzungen existiert eine surjektive Isometrie $V \in \mathscr{L}(\overline{E_{|x|}})$, die für alle $y \in \overline{E_{|x|}}$ der Beziehung $\alpha \cdot Sy = V^{-1}SVy$ genügt.

Beweis. Zunächst soll das Hauptideal $E_{|x|}$ nach [27], II.7.2 Cor.; 7.4 mit einem Raum $C(X)$ identifiziert

werden, wobei X einen geeigneten kompakten Hausdorff-Raum bezeichnet. Die Einschränkung von T auf $C(X)$ induziert dann einen Markoff-Operator T_o und die Einschränkung von S auf $C(X)$ einen nach [27],II.5.3 Cor.1 stetigen Operator S_o. Für die mit x zu identifizierende unimodulare Eigenfunktion $f \in C(X)$ von T_o gilt nach [27], V.4.2 nun $\alpha f(s) = f(t)$ für alle $t \in \operatorname{supp} T_o'\delta_s$, wobei $s \in X$ beliebig gewählt wird und δ_s das entsprechende Dirac-Maß bezeichnet. Die Voraussetzung ergibt aber $\operatorname{supp} S_o'\delta_s \subset \operatorname{supp} T_o'\delta_s$: ist nämlich h eine positive Funktion in $C(X)$, so gilt

$$|\langle h, S_o'\delta_s\rangle| = |\langle S_o h, \delta_s\rangle| \leq c\cdot\langle T_o h, \delta_s\rangle = c\cdot\langle h, T_o'\delta_s\rangle;$$

das bedeutet aber, daß $|S_o'\delta_s|$ in dem von $T_o'\delta_s$ in $C(X)'$ erzeugten Ideal liegt und nach [4], chap. 5, §5.5 Cor.2 deshalb absolutstetig bezüglich $T_o'\delta_s$ ist. Hieraus folgt aber die behauptete Inklusion für die Träger der Maße.
Damit ergibt sich für jedes $s \in X$ und jedes $h \in C(X)$ die Gleichung

$$S_o(fh)(s) = \int_{\operatorname{supp} S_o'\delta_s} fh \, d(S_o'\delta_s) =$$

$$= \alpha f(s) \int_{\operatorname{supp} S_o'\delta_s} h \, d(S_o'\delta_s) = \alpha f(s) S_o h(s) ,$$

d.h. es gilt $S_o(fh) = \alpha f S_o h$. Ist nun $V_o \in \mathcal{L}(C(X))$ die durch $h \to fh$ definierte Surjektion, so gilt damit

$\alpha S_o = V_o^{-1} S_o V_o$. Wegen der Unimodularität von f und der daraus resultierenden Beziehung $|V_o h| = |h|$ für alle $h \in C(X)$, läßt sich, unter Beachtung der Eigenschaften einer Verbandsnorm, V_o zu einer surjektiven Isometrie (für die von E induzierte Norm) V auf $\overline{E_{|x|}}$ mit der gewünschten Eigenschaft $\alpha S = V^{-1} S V$ fortsetzen.

Bemerkung. Die Idee zu diesem Beweis von (3.1) wird durch den Beweisgang von [27], V.5.1 (bzw. [11], Satz 4.4) nahegelegt.

Damit kommen wir gleich zum ersten Ergebnis, welches in der Tat eine Verallgemeinerung von (1.2) darstellt. Die hierbei verwendete Schreibweise $A \cdot B$ für Mengen A und B komplexer Zahlen bedeutet einfach die Menge aller Produkte $a \cdot b$ mit $a \in A$ und $b \in B$; insbesondere also ist $A \cdot \emptyset = \emptyset$. Außerdem sollen die folgenden Abkürzungen benutzt werden: $F(T)$ bezeichnet den Fixraum $\{x \in E : Tx = x\}$, $F^s(T)$ den Super-Fixraum $\{x \in E : Tx \geq x\}$ und $F(T)_+$ bzw. $F^s(T)_+$ den jeweiligen positiven Kegel.

3.2 Satz. Sei E ein Banachverband und T ein irreduzibler positiver Operator auf E mit $r(T) = 1$ und $F^s(T)_+ = F(T)_+$. Ist $S \in \mathcal{L}(E)$ ein Operator mit der Eigenschaft $|Sz| \leq cTz$ für eine reelle Zahl c und alle $z \in E_+$, so gelten die Beziehungen

(a) $\pi p\sigma(T) \cdot \sigma(S) = \sigma(S)$,

(b) $\pi p\sigma(T) \cdot p\sigma(S) = p\sigma(S)$.

Mit anderen Worten also: sowohl $\sigma(S)$ als auch $p\sigma(S)$ sind invariant unter Rotationen mit Werten $\alpha \in \pi p\sigma(T)$.

Beweis. Sei $Tx = \alpha x \neq 0$, $|\alpha| = 1$. Aus $T|x| \geq |Tx| = |x|$ folgt nach Voraussetzung $T|x| = |x|$. Wegen der Irreduzibilität von T gilt $E = \overline{E_{|x|}}$ und somit liefert (3.1) die Existenz einer surjektiven Isometrie $V \in \mathcal{L}(E)$ mit $\alpha \cdot S = V^{-1}SV$. Unter Beachtung von $\sigma(\alpha \cdot S) = \alpha \cdot \sigma(S)$ und $\sigma(V^{-1}SV) = \sigma(S)$ folgen hieraus die Gleichungen (a) und (b).

Bemerkungen. 1. Um die in (3.2) gemachte Voraussetzung $F^S(T)_+ = F(T)_+$ zu erfüllen, genügt die Existenz einer von Null verschiedenen invarianten positiven Linearform ϕ von T: diese ist wegen der Irreduzibilität von T nämlich strikt positiv, und daher folgt aus $T|x| \geq |x|$

und $\langle T|x| - |x|, \phi \rangle = \langle |x|, T'\phi \rangle - \langle |x|, \phi \rangle = 0$

stets $T|x| - |x| = 0$. Die Existenz einer solchen Linearform ϕ ist gesichert im Falle $E = C(X)$, X kompakt (siehe (2.11)), oder in dem Fall, daß $r(T)$ ein Pol der Resolvente von $R(\mu,T)$ ist (siehe (2.10)).

2. Die in der Situation von (3.2) eventuell zu vermutende Implikation $\pi p\sigma(T) \neq \emptyset \Rightarrow \pi p\sigma(S) \neq \emptyset$ ist im allgemeinen nicht gegeben, wie durch das folgende Beispiel belegt wird.

Sei $E = C([0,1])$, S und N die durch $Sf := 0{,}5 \cdot id_{[0,1]} \cdot f$ und $Nf := \int_0^1 f(t)\,dt \cdot 1_{[0,1]}$ auf E definierten positiven Operatoren. Dann ist $T := S + N$ wegen der Irreduzibilität von N ebenfalls irreduzibel, und es gilt $r(T) \geq r(N) > r(S)$. Als Operator endlichen Ranges ist N aber kompakt, und so folgt aus [5], VII.4.5, daß $\pi\sigma(T)$ aus lauter Polen von $R(\mu,T)$ besteht, insbesondere also in $\pi p\sigma(T)$ enthalten ist. Dagegen ist $\pi p\sigma(S) = \emptyset$.

3. Im Falle $S \geq 0$ folgt aus (a) die etwas suggestivere Beziehung $\pi p\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$ ([27], V.4.1) und aus (b) die Inklusion $\pi p\sigma(T) \subset \pi p\sigma(S)$, falls $r(S) \in p\sigma(S)$ gilt. Dieser Fall tritt - unter der Voraussetzung $r(S) > 0$ - ein, sofern S oder T eine kompakte Potenz besitzt: aus $0 \leq S^n \leq T^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ folgt nämlich nach einem Resultat von [1] (Theorem 2.1) die Kompaktheit von S^{3n} aus der Kompaktheit von T^n; daher ist $r(S^{3n}) = r(S)^{3n} > 0$ ein Pol der Resolvente von $R(\mu,S^{3n})$ und nach [27], V.Exc.5(d) somit $r(S)$ Pol der Resolvente von $R(\mu,S)$; also liegt $r(S)$ im Punktspektrum von S ([24], App., p.260).

Beispiel. Sei Γ der Einheitskreis in der komplexen Ebene und $E = C(\Gamma)$. T sei der positive Operator auf E, welcher durch die Rotation mit einer komplexen Zahl in Γ, die nicht Einheitswurzel ist, induziert wird: es sei also $a^n \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $Tf(z) = f(az)$ für alle $z \in \Gamma$ und alle $f \in E$. T ist dann

irreduzibel ([27], III.8., Ex. 4) und es gilt $\pi p\sigma(T) = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$. Nun sei $q \in E$ und S der durch $Sf := q \cdot Tf$, $f \in E$, definierte positive Operator. Offensichtlich wird S majorisiert von $||q|| \cdot T$. Die Aussage (a) von (3.2) liefert daher $\pi\sigma(S) \supset \{r(S) \cdot a^k : k \in \mathbb{Z}\}$, wegen der Abgeschlossenheit von $\sigma(S)$ also $\pi\sigma(S) = r(S) \cdot \Gamma$, unabhängig von q.

Weiter sei T_1 gegeben durch $T_1 f(z) = f(a_1 z)$ für alle $z \in \Gamma$ und alle $f \in E$, wobei $a_1^m = 1$ für ein $m \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt wird. Betrachten wir jetzt $S_1 := cT + (1-c)T_1$ für $c \in \mathbb{R}$, $0 < c < 1$, so liefert (3.2)(b) die Aussage $\pi p\sigma(S_1) = \{1\}$; denn es ist $T \leq c^{-1}S_1$ und $T_1 \leq (1-c)^{-1}S_1$ und so folgt $\pi p\sigma(S_1) \subset \pi p\sigma(T) \cap \pi p\sigma(T_1) = \{1\}$. Ist schließlich $S_2 \in \mathcal{L}(E)$ ein positiver Operator endlichen Ranges (und demzufolge $\sigma(S_2)$ endlich) und $r(S_2) > 0$, so kann dieser, wiederum nach (2.3)(b), nicht von T majorisiert werden.

Anstatt $E = C(\Gamma)$ hätten wir in diesem Beispiel übrigens auch $E = L^p(\Gamma,\mu)$, $1 \leq p < \infty$, setzen können, wenn μ hier das Haar-Maß auf Γ bezeichnet (hier sei stets $q \in L^\infty(\Gamma,\mu)$). Denn auch dann ist das oben definierte T irreduzibel (vgl. [27], III.1.Ex.2) und sowohl T als auch T_1 besitzen die invariante Linearform $\mathbb{1}_\Gamma$. Außerdem gelten die Aussagen über $\pi p\sigma(T)$ und $\pi p\sigma(S_1)$ entsprechend.

Ist der Verband E ordnungsvollständig, so kann - wie eingangs des Kapitels bereits erwähnt wurde - die Beding-

ung $|S| \leq cT$ gestellt werden, d.h. es wird gefordert, daß S in dem von T in $\mathscr{L}^r(E)$ erzeugten Ideal liegt. Der nächste Satz soll noch Auskunft darüber geben, unter welchen Bedingungen S nur in dem von T erzeugten Band zu liegen braucht, um die Ergebnisse von (3.2) zu erhalten.

3.3 Satz. Sei E ein ordnungsvollständiger Banachverband, auf dem es eine strikt positive, ordnungsstetige Linearform gibt. Weiter sei T ein irreduzibler positiver Operator auf E mit $r(T) = 1$ und $F^s(T)_+ = F(T)_+$. Ist $S \in \mathscr{L}^r(E)$ ein regulärer Operator und enthalten in dem von T erzeugten Band $T^{\perp\perp}$, so gelten die Beziehungen

(a) $\pi p\sigma(T) \cdot \sigma(S) = \sigma(S)$,

(b) $\pi p\sigma(T) \cdot p\sigma(S) = p\sigma(S)$.

Beweis. Sei $Tx = \alpha x \neq 0$, $|\alpha| = 1$. Aus $T|x| \geq |x|$ folgt also $T|x| = |x|$ wegen $F^s(T)_+ = F(T)_+$. Sei nun ϕ die strikt positive, ordnungsstetige Linearform.
Nach Voraussetzung existieren reguläre lineare Operatoren S_i auf E, $i \in I$, $|S_i| \leq c_i T$ $(c_i \in \mathbb{R})$, welche für jedes $y \in E_+$ die Gleichungen

$$S^+y = \sup_{i\in I} S_i^+ y \quad \text{und} \quad S^-y = \sup_{i\in I} S_i^- y$$

erfüllen; hierbei können die Familien $(S_i^+)_{i\in I}$ und $(S_i^-)_{i\in I}$ als gerichtet angenommen werden.

Die in (3.1) konstruierte Isomorphie hing nur von T, nicht aber von S ab. Also gibt es in der vorliegenden Situation eine surjektive Isometrie $V \in \mathcal{L}(E)$ mit der Eigenschaft (1) $\alpha S_i = V^{-1} S_i V$ für jedes $i \in I$.

Nun wird der AL-Raum $E_1 := (E, \phi)$ (siehe (2.14)) betrachtet: wegen der strikten Positivität von ϕ enthält er E als dichten Teilraum, und die Einschränkung der von ϕ erzeugten Topologie auf E ist gröber als die ursprüngliche Normtopologie. Nach der Konstruktion im Beweis von (3.1) läßt sich die Einschränkung von V auf $E_{|x|}$ dann auf ganz E_1 zu einer surjektiven Isometrie $V_1 \in \mathcal{L}(E_1)$ fortsetzen, die auf $E \subset E_1$ mit V übereinstimmt.
Die Ordnungsstetigkeit von ϕ liefert aber für alle $y \in E_+$ die Gleichungen

$$\inf_{i \in I} \langle S^+ y - S_i^+ y, \phi \rangle = 0 = \inf_{i \in I} \langle S^- y - S_i^- y, \phi \rangle,$$

anders ausgedrückt also

$$\lim_{i \in I} ||S^+ y - S_i^+ y||_{E_1} = 0 = \lim_{i \in I} ||S^- y - S_i^- y||_{E_1}$$

für alle $y \in E_+$ und damit $\lim_{i \in I} ||Sy - S_i y||_{E_1} = 0$ für alle $y \in E$. Da nach den obigen Ausführungen V (und ebenso auch V^{-1}) für die von E_1 induzierte Topologie stetig ist, folgt aus (1) die Gleichung $\alpha S = V^{-1} S V$. Hieraus ergeben sich die Behauptungen (a) und (b) wie in (3.2).

Bemerkungen. 1. Der obige Beweis zeigt, daß auf die Ordnungsvollständigkeit von E allerdings doch verzichtet werden kann, sofern die oben durch $S \in T^{\perp\perp}$ definierte Beziehung ohne Rückgriff auf eine Verbandsstruktur von $\mathcal{L}(E)$ formuliert wird.

2. Eine Linearform ϕ mit den gewünschten Eigenschaften existiert stets dann, wenn $E = F'$ gilt und der Banachverband F einen quasi-inneren Punkt besitzt. Dies ist z.B. der Fall für $E = L^p(X,\Sigma,\mu)$, $1 < p \leq \infty$, wobei (X,Σ,μ) einen σ-endlichen Maßraum bezeichnet. Aber auch im Falle $E = L^1(X,\Sigma,\mu)$ existiert ein ϕ mit den gewünschten Eigenschaften: es genügt hier, eine fast überall positive Funktion in $L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ zu wählen (siehe [27], II.6.Ex.1).
Ist ϕ zudem invariant unter T', so ist die Voraussetzung $F^S(T)_+ = F(T)_+$ damit automatisch erfüllt.

Die in den Beweisen von (3.2) und (3.3) hergeleitete Beziehung $\alpha S = V^{-1}SV$ gilt natürlich jeweils auch für $S = T$, da T die über S gemachten Voraussetzungen ja erfüllt. Also ist in diesen Fällen $\pi p\sigma(T)$ stets zyklisch, d.h. mit $r\cdot\alpha$, $|\alpha| = 1$ ist stets auch $r\cdot\alpha^k$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ in $\sigma(T)$ enthalten. Mit Hilfe dieser Beobachtung läßt sich folgender Sachverhalt feststellen.

3.4 Korollar. Die Voraussetzungen seien dieselben wie in (3.2) oder (3.3). Ist dann $\pi p\sigma(T)$ unendlich, so besteht $\sigma(S)$ aus Vereinigungen konzentrischer Ringe.

Beweis. Ist $\pi p\sigma(T)$ unendlich, so folgt aus der oben bereits bemerkten Zyklizität, daß $\pi p\sigma(T)$ dicht im Einheitskreis ist. Die Behauptung ergibt sich also unmittelbar aus (3.2) und (3.3).

Beispiel. Nach [2], (2.17) ist $\pi p\sigma(T)$ z.B. dann unendlich, wenn $\pi p\sigma(T) \neq \emptyset$ gilt und für T keine Zyklengrenze existiert ([2], Seite 28). In der Situation von (3.2) und (3.3) wird aber stets $F(T)_+ = F^s(T)_+$ verlangt. Daher ist in unserem Fall die Aussage $\pi p\sigma(T) \neq \emptyset$ gleichwertig mit $F(T)_+ \neq \{0\}$.

Ein Beispiel für einen irreduziblen positiven Operator ohne Zyklengrenze wird in [2], 2. Bsp. 3 gegeben:

Sei $X = [0,1)$, Σ die Sigma-Algebra der Borelmengen in X, μ das Lebesguemaß auf X und $E := L^p(X,\Sigma,\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Die durch $\phi(t) := t + 1 - 3 \cdot 2^{-n-1}$, $t \in [2^{-n-1}, 2^{-n})$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ erklärte Abbildung läßt μ invariant und induziert so einen irreduziblen positiven Operator T_ϕ auf E (vermöge $T_\phi f = f \circ \phi$ für $f \in E$), welcher dann keine Zyklengrenze besitzt. Ist nun etwa $g \in L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ und $S \in \mathfrak{L}(E)$ definiert durch $Sf = g \cdot Tf$ für $f \in E$, so besteht nach unseren obigen Überlegungen $\sigma(S)$ aus einer Vereinigung konzentrischer Ringe.

Nun wollen wir zur zweiten Klasse von Ergebnissen überleiten: T ist nicht mehr als irreduzibel vorausgesetzt, soll aber wenigstens einen quasi-inneren Fixpunkt besitzen, und ähnliches wird auch vom majorisierten Operator S gefordert. Dabei wird, wie übrigens ja auch im irreduziblen Fall (3.2) und (3.3), zunächst peripheres Punktspektrum von T mit peripherem Spektrum von S verglichen.

3.5 Satz. Sei E ein Banachverband und T ein positiver Operator auf E mit $r(T) = 1$ und einem quasi-inneren Fixpunkt $u \in E_+$. $S \in \mathcal{L}(E)$ erfülle die Bedingungen $|Sz| \leq cTz$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $z \in E_+$, $r(S) = 1$ und besitze einen peripheren Eigenwert β mit Eigenvektor w, dessen Betrag $|w|$ quasi-innerer Punkt von E_+ ist.
Unter diesen Voraussetzungen gilt $\beta \cdot \pi p\sigma(T') \subset \pi\sigma(S)$.

Beweis. Sei $T'\phi = \alpha\phi \neq 0$ mit $\phi \in E'$ und $|\alpha| = 1$, also $T'|\phi| \geq |\phi|$. Es gilt

$$\langle u, T'|\phi| - |\phi| \rangle = \langle Tu, |\phi| \rangle - \langle u, |\phi| \rangle = 0 ,$$

und damit verschwindet die positive Linearform $T'|\phi| - |\phi|$ auf E_u. Da u als quasi-innerer Punkt vorausgesetzt wurde, liegt E_u dicht in E und so folgt $T'|\phi| = |\phi|$. Nun soll (3.1) auf E', T' und S' angewandt werden. Die dazu benötigte Majorisierungsrelation zwischen S'

und T' läßt sich wie folgt herleiten: für jedes $z \in E_+$ und $\phi \in E'_+$ gilt

$$\langle z, |S'\phi| \rangle = \sup\{|\langle y, S'\phi\rangle| : 0 \leq |y| \leq z\} =$$

$$= \sup\{|\langle Sy, \phi\rangle| : 0 \leq |y| \leq z\} \leq$$

$$\leq \sup\{\langle |Sy|, \phi\rangle : 0 \leq |y| \leq z\} \leq$$

$$\leq c \cdot \sup\{\langle T|y|, \phi\rangle : 0 \leq |y| \leq z\} =$$

$$= c \cdot \langle Tz, \phi\rangle = c \cdot \langle z, T'\phi\rangle .$$

Also erhalten wir $|S\psi| \leq c \cdot T'\psi$ für alle $\psi \in E'_+$, und (3.1) liefert daher die Existenz einer surjektiven Isometrie $V \in (\overline{E'_{|\phi|}})$ mit (1) $\alpha S'y = V^{-1}S'Vy$ für alle $y \in \overline{E'_{|\phi|}}$. Vermöge der kanonischen Bilinearform $E \times E' \to \mathbb{C}$ werden nun w und $'|w|$ als positive Linearformen auf $\overline{E'_{|\phi|}}$ aufgefaßt; da nach [27], II.6.3 $\langle |w|, |\phi| \rangle > 0$ gilt, verschwindet $|w|$ nicht auf $\overline{E'_{|\phi|}}$ und daher gilt dies auch für w, d.h. w, betrachtet als Element von $(\overline{E'_{|\phi|}})' = E''/(\overline{E'_{|\phi|}}^{\circ})$, ist von Null verschieden. Hieraus ergibt sich mit Hilfe von (2.5)

$$1 = r(S) = r(S') \geq r(S'_{|\overline{E'_{|\phi|}}}) = r((S'_{|\overline{E'_{|\phi|}}})'') =$$

$$= r(S''_{\overline{E'_{|\phi|}}^{\circ}}) \geq 1 ,$$

also sind alle diese Spektralradien gleich $r(S)$. Aus (1) kann daher mit (2.3)

$$(2)\quad \alpha\beta \in \pi p\sigma(S''_{\overline{E'|\phi|}}) \subset \pi\sigma(S'') = \pi\sigma(S)$$

gefolgert werden.

Bemerkung. Das Ergebnis von (3.5) kann nicht mehr in der allgemeineren Form wie in (3.2) ausgesprochen werden, auch nicht im Falle endlicher Dimension von E. Dies zeigt sich nämlich bereits beim Betrachten der Matrix

$$T = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \quad \sigma(T) = \{-1,\ 1,\ 0{,}5\};$$

hier gilt $\pi p\sigma(T) \cdot \sigma(T) = \{-1,\ 1,\ 0{,}5,\ -0{,}5\} \supsetneq \sigma(T)$.

Erfüllt T in (3.5) zusätzlich die Wachstumsbedingung

(W): $||(\mu - r(T))R(\mu,T)||$ ist beschränkt für $\mu > r(T)$,

so ergibt sich die vielleicht eher erwartete Inklusion $\beta \cdot \pi p\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$, denn nach [28], Satz 3.2 gilt dann

$$(*)\quad \pi p\sigma(T) \subset \pi p\sigma(T').$$

Allerdings kann auch unter dieser zusätzlichen Voraussetzung nicht auf den quasi-inneren Fixpunkt u verzichtet werden. Sei nämlich

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} ;$$

hier ist $r(T)$ Pol erster Ordnung von $R(\mu,T)$, also erfüllt T die Bedingung (W), und S besitzt einen strikt positiven Eigenvektor zu $r(S)$, aber es gilt nicht $r(S)\cdot\pi\sigma(T) \subset r(T)\cdot\pi\sigma(S)$.

Im nächsten Lemma soll nun eine Umkehrung der Beziehung (*) aufgezeigt werden.

3.6 Lemma. Sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm, T ein positiver Operator auf E mit $r(T) = 1$, welcher die Bedingung $Tu \leq u$ für einen quasi-inneren Punkt $u \in E_+$ erfüllt.
Dann gilt $\pi p\sigma(T') \subset \pi p\sigma(T)$.

Beweis. Sei also $T'\phi = \alpha\phi \neq 0$ mit $\phi \in E'$ und $|\alpha| = 1$. Vermöge der kanonischen Bilinearform $E\times E' \to \mathbb{C}$ definiert u eine positive Linearform auf E' und daher kann die in (2.11) erklärte kanonische Dualität $\langle (E',u), E''_u \rangle$ betrachtet werden. Da $Tu \leq u$ gilt, läßt sich T' zu

einem positiven Operator T'_o auf (E',u) fortsetzen. Nach [27], II.6.3 ist $\langle u,|\phi|\rangle > 0$, und daher besitzt T'_o den Eigenwert α (mit Eigenvektor ϕ). Die Anwendung der Inklusion (*) (siehe Seite 41) auf T'_o liefert also die Existenz eines von Null verschiedenen Vektors $z \in E''_u$ mit der Eigenschaft $T''z = T''|_{E''_u} z = (T'_o)'z = \alpha z$; denn $T''|_{E''_u}$ und damit auch T'_o erfüllen die Wachstumsbedingung, was sich aus $T''u \leq u$ unter Beachtung der Tatsache, daß E''_u ein AM-Raum ist, mit Hilfe der Darstellung von $R(\mu,T)$ durch die von Neumann'sche Reihe unmittelbar ergibt.

Nach [27], II.5.10 ist aber das kanonische Bild von E unter der Auswertungsabbildung ein Ideal in E'', und damit liegt E''_u, insbesondere also z, bereits in E. So ist schließlich gezeigt, daß α Eigenwert von T ist.

3.7 Korollar. Sei E ein Banachverband und T ein positiver Operator auf E mit $r(T) = 1$ und einem quasi-inneren Fixpunkt $u \in E_+$. $S \in \mathcal{L}(E)$ erfülle die Bedingungen $|Su| \leq cTz$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $z \in E_+$, $r(S) = 1$ und $Sw = w$ mit quasi-innerem Punkt $|w|$. Betrachte zusätzlich die folgenden beiden Voraussetzungen:

(a) E' besitzt ordnungsstetige Norm, $0 \leq S$ und $c = 1$,

(b) S' ist mittel-ergodisch.

Ist eine der beiden Bedingungen (a) oder (b) erfüllt, so folgt $\pi p\sigma(T') \subset \pi p\sigma(S')$.

Beweis. Sei $T'\phi = \alpha\phi \neq 0$ mit $\phi \in E'$ und $|\alpha| = 1$. Da S und T die Voraussetzungen von (3.5) erfüllen, gilt die in dem dortigen Beweis hergeleitete Beziehung ($\beta = 1$)

(2) $\alpha \in \pi p\sigma(S''_{\overline{E'_{|\phi|}}})$.

1. Ist Voraussetzung (a) erfüllt, so besitzt $\overline{E'_{|\phi|}}$ nach [27], III.11.1 Cor. ordnungsstetige Norm und $S'_{|\overline{E'_{|\phi|}}}$ den in $(\overline{E'_{|\phi|}})_+$ quasi-inneren Sub-Fixpunkt $|\phi|$. So liefert (3.6) also die Inklusionen

$$\pi p\sigma(S''_{\overline{E'_{|\phi|}}}) \subset \pi p\sigma(S'_{|\overline{E'_{|\phi|}}}) \subset \pi p\sigma(S') ,$$

womit dann $\alpha \in \pi p\sigma(S')$ gezeigt ist.

2. Ist S' mittel-ergodisch, so folgt aus $F((S'_{|\overline{E'_{|\phi|}}})') \neq \{0\}$, daß S' in $\overline{E'_{|\phi|}}$ einen von Null verschiedenen Fixvektor besitzt. Aus Gleichung (1) des Beweises von (3.5) wird daher die Behauptung $\alpha \in \pi p\sigma(S')$ offensichtlich.

3.8 Korollar. Sei $E = C(X)$, X ein kompakter Hausdorff-Raum, und S und T seien Markoff-Operatoren auf E mit $S \leq cT$ für eine reelle Zahl c. Dann gilt für die peripheren Spektren die Inklusion $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$.

Beweis. Für einen Filter F auf $\mathbb{N}$, welcher feiner ist als der Frechet-Filter, werde das F-Produkt $\hat{E}_F$ betrach-

tet (siehe (2.15)). Nach [27], V.1.Ex.1 gibt es einen kompakten Raum H mit $\hat{E}_F = C(H)$. Da die Markoff-Eigenschaft beim Übergang von E zu $\hat{E}_F$ erhalten bleibt, liefert nun (2.5) - angewandt auf $\hat{E}_F$, $\hat{S}$ und $\hat{T}$ - die behauptete Inklusion.

Bemerkung. Sind S und T Markoff-Operatoren mit $S \leq cT \leq dS$ für reelle Zahlen c und d, so folgt aus (3.8) $\pi\sigma(T) = \pi\sigma(S)$ (Für endliche Matrizen bedeutet diese Voraussetzung, daß S und T dieselben Nullkoeffizienten besitzen). Sind also T_1 und T_2 beliebige Markoff-Operatoren und wird $T_c := cT_1 + (1-c)T_2$ gesetzt, so sind für $0 < c < 1$ die peripheren Spektren von T_c identisch.

Die Beweismethode von (3.8) kann nicht ohne weiteres auf beliebige Banachverbände übertragen werden. Denn die Eigenschaft eines Vektors $x \in E$, ein quasi-innerer Punkt von E_+ zu sein, bleibt beim Übergang von E zu $\hat{E}_F$ i.a. nicht erhalten (vgl. [27], V, Exc.1). Doch beweisen wir mit der Methode noch folgende Erweiterung von (3.2).

3.9 Satz. Sei $E = C(X)$, X kompakt, und T ein irreduzibler positiver Operator auf E mit $r(T) = 1 \in p\sigma(T)$. Ist $S \in \mathcal{L}(E)$ ein Operator mit $|Sz| \leq cTz$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $z \in E_+$ und $r(S) = 1 \in p\sigma(S)$, so gelten die Inklusionen

(a) $\pi p\sigma(T) \subset \pi p\sigma(S)$,

(b) $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$.

Beweis. Beziehung (a) ist unter den gegebenen Voraussetzungen eine direkte Folgerung aus (3.2)(b). Um Inklusion (b) zu beweisen, wird wie im Beweis von (3.8)(a) für einen geeigneten Filter F auf $\mathbb{N}$ der Raum $\hat{E}_F = C(H)$ betrachtet. Im übrigen ist zu bemerken, daß T ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Markoff-Operator angenommen werden kann; denn der nach Voraussetzung existierende Fixvektor x von T ist wegen der Irreduzibilität strikt positiv und daher ist es möglich, statt T den durch $T_o z = x^{-1} \cdot T(x \cdot z)$ definierten Markoff-Operator zu betrachten, ohne eine der Voraussetzungen zu verlieren (die Konstante c ist durch $c_o := \|x^{-1}\| \cdot \|x\| \cdot c$ zu ersetzen).

Sei nun $\alpha \in \pi\sigma(T)$. Dann gilt $\alpha \in \pi p\sigma(\hat{T})$ und da mit T auch $\hat{T}$ ein Markoff-Operator ist und somit die Wachstumsbedingung (W) erfüllt, gibt es nach den Bemerkungen vor (3.7) ein $\hat{\phi} \in \hat{E}_F'$, $\hat{\phi} \neq 0$, mit $\hat{T}'\hat{\phi} = \alpha\hat{\phi}$. Analog zum Beweis von (3.5) folgt die Existenz einer surjektiven Isometrie $V \in \mathcal{L}(\hat{E}_F' | \hat{\phi}|)$ mit der Eigenschaft $\alpha \hat{S}'y = V^{-1}\hat{S}'Vy$ für alle $y \in \hat{E}_F' | \hat{\phi}|$ (wobei die Funktion $\mathbb{1}_H$ die Rolle des quasi-inneren Punktes u in (2.5) übernimmt).

Ist w ein Eigenvektor von S zum Eigenwert $r(S)$ und $\hat{w}$ sein kanonisches Bild in $\hat{E}_F$, so genügt es zur restlichen Durchführung der Beweisidee von (3.5) zu zeigen, daß $\langle |\hat{w}|, |\hat{\phi}| \rangle$ nicht verschwindet. Sei hierzu

$\hat{I} := \{y \in \hat{E}_F : \langle |y|, |\hat{\phi}| \rangle = 0\}$ der absolute Kern von $|\hat{\phi}|$. Wegen der Invarianz von $|\hat{\phi}|$ unter $\hat{T}'$ ist $\hat{I}$ ein $\hat{T}$-Ideal und der (mit seinem Urbild in E identifizierte)

Durchschnitt $I := \hat{I} \cap E$ ein T-Ideal. Da $\hat{\phi} \neq 0$ vorausgesetzt wurde, gilt $\hat{1} \notin \hat{I}$ und damit $1 \notin I$, d.h. I ist von E verschieden, und unter Beachtung der Irreduzibilität von T folgt so $I = \{0\}$. Wegen $w \in E$ gilt also $\langle |\hat{w}|, |\hat{\phi}| \rangle > 0$, und die Behauptung kann nun wie im Beweis von (3.5) gefolgert werden.

Bemerkung. Die besondere Aussage von (3.9) liegt einerseits im Vergleich mit (3.2) darin, daß $\pi\sigma(T)$ und nicht nur $\pi p\sigma(T)$ in $\pi\sigma(S)$ enthalten ist, und andererseits im Vergleich mit (3.5) darin, daß an den Eigenvektor zum Eigenwert $r(S)$ keine Bedingung gestellt wird.

Im Beweis von (3.3) wurde die Tatsache ausgenützt, daß die Beziehung (1) $\alpha S_i = V^{-1} S_i V$ für eine Familie positiver Operatoren S_i mit Supremum S in L(E) (den linearen Operatoren) und eine surjektive Isometrie $V \in \mathcal{L}(E)$ sich bei ordnungsstetiger Norm von E auf das Supremum weitervererbt. In diesem Sinne können auch die Aussagen in (3.5) und (3.7) noch erweitert werden. Die Gleichung (1) spielt sich dort aber jeweils in einem Ideal von E' ab. Daher scheint es sinnvoll, die Beziehung $S' \in T'^{\perp\perp}$ zu fordern. Wie eine kurze Rechnung zeigt, folgt dies aber bei ordnungsstetiger Norm von E aus der Inklusion $S \in T^{\perp\perp}$.

Wie oben bereits erwähnt wurde, läßt sich die in der Spektraltheorie positiver Operatoren erfolgreiche Methode,

welche auch im Beweis von (3.8) benutzt wurde, von einem Banachverband E zu einem geeigneten F-Produkt $\hat{E}_F$ überzugehen, nicht ohne weiteres auf die Situation von (3.5) anwenden, um etwa die Inklusion $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$ herzuleiten. In der Tat zeigt es sich, daß diese im allgemeinen auch nicht gilt, wie das folgende Beispiel belegt.

Zunächst seien die Matrizen

$$T_n := \begin{bmatrix} 0 & n/n+1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad S_n := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

definiert. E sei nun der Banachverband aller Folgen (z_n) mit $z_n \in \mathbb{C}^3$, für welche $\sum_{n=1}^{\infty} ||z_n|| < \infty$ gilt. Auf E werden nun die durch $T(z_n) := (T_n z_n)$, $S(z_n) := (S_n z_n)$ wohldefinierten positiven Operatoren T und S betrachtet. Aus den Eigenschaften $\sigma(S_n) = \{0, 1\}$ und $\sigma(T_n) = \{-(n/n+1)^{1/2}, +(n/n+1)^{1/2}, 1\}$ ergibt sich $-1 \in \sigma(T)$ und $-1 \notin \sigma(S)$ (wobei $r(S) = r(T) = 1$ gilt); die erste Aussage folgt aus der Abgeschlossenheit des Spektrums von T und die zweite aus der Tatsache, daß die Normen von $R(\mu, S_n)$ gleichmäßig (in n) beschränkt sind. Außerdem besitzen T und S die quasi-inneren Fixvektoren

$$x := (((2n+1)/4n^2, (n+1)/2n^2, 1/n^2))_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{bzw.}$$

$$y := ((2/n, 1/n, 4/n))_{n\in\mathbb{N}} ,$$

so daß also (unter Beachtung von $S \leq 2T$) alle Voraussetzungen von (3.5) erfüllt sind, aber nicht die Beziehung $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$. Es sei noch angemerkt, daß der Banachverband E isomorph zu l^1 ist und daß das obige Beispiel durch naheliegende Modifikationen sich auf einen reflexiven Banachverband übertragen läßt.

Im folgenden jedoch soll eine Konstellation angegeben werden, bei welcher die in Frage stehende Beziehung sogar auf beliebigen Banachverbänden gilt. Die dabei verwendete Beweismethode besteht in einer Zurückführung des Falles auf die Situation von (3.5).

Grundlage dieser Methode sind die Ergebnisse der Arbeiten von S. Miyajima [15] und I. Sawashima und F. Niiro [22]. Diese liefern nämlich die Reduktion eines Banachverbandes E in Komponenten E_λ (bzw. deren Quotienten E_λ/I_λ), so daß für einen gleichmäßig mittel-ergodischen positiven Operator T auf E das periphere Spektrum $\pi\sigma(T)$ durch die Spektren seiner Komponenten T_λ/I_λ, welches dann irreduzible positive Operatoren auf E_λ/I_λ sind, gegeben ist. Für den nicht als gleichmäßig mittel-ergodisch vorausgesetzten Operator S ist es dann immer noch möglich, von den peripheren Spektren seiner Komponenten S_λ/I_λ auf das periphere Spektrum von S zu schließen.

Um das Verständnis des nachstehenden Beweises von (3.12) zu gewährleisten, werden die nötigen Details der Arbeiten [15], [21] und [22] kurz aufgeführt, jedoch ohne Beweise,

sondern im Sinne der Klärung der verwendeten Terminologie, die sich an [15] anschließt.

Sei also E ein Banachverband und T ein gleichmäßig mittel-ergodischer positiver Operator auf E mit quasi-innerem Fixpunkt $e \in E_+$. Bezeichnet $P \in \mathcal{L}(E)$ die zu T gehörende positive mittel-ergodische Projektion, so ist der Fixraum PE von T ein Vektorverband unter der von E induzierten Ordnung ([27], III.11.5). Die Räume E_e und $PE \cap E_e$ sind AM-Räume mit Einheit e unter der vom Ordnungsintervall $[-e,e]$ induzierten Norm ([27],II.7.25) und können daher mit Räumen $C(\Omega)$ bzw. $C(\Lambda)$ identifiziert werden ([27], II.7.4; Ω und Λ bezeichnen kompakte topologische Hausdorff-Räume).
Für $\lambda \in \Lambda$ und eine beliebige Umgebung A von λ in Λ bezeichne I_A den Abschluß des Ideals

$$\{x \in E : \text{es gibt } y \in PE \cap E_e \text{ mit } y(A) \subset \{0\} \text{ und } |x| \leq y\}$$

in E. I_A enthält e nicht ([15], Lemma 1) und mit $||x + I_A|| := \inf\{||x + y|| : y \in I_A\}$ kann deshalb auf E die durch

$$||x||_A := ||x + I_A|| \cdot ||e + I_A||^{-1}$$

definierte Verbandshalbnorm betrachtet werden.
Ist $\mathcal{N}_\lambda$ der Umgebungsfilter von λ, gerichtet bezüglich

Inklusion, so ist

$$E_\lambda^{\circ\circ} := \{x \in E : ||x||_\lambda := \lim\sup\{||x||_A : A \in \mathcal{N}_\lambda\} < \infty\}$$

ein Ideal in E, auf dem $||.||_\lambda$ eine Verbandshalbnorm definiert, und die Vervollständigung von $E_\lambda^{\circ\circ}/\{x \in E : ||x||_\lambda = 0\}$ bezüglich der Quotientennorm von $||.||_\lambda$, welche ebenfalls mit $||.||_\lambda$ bezeichnet wird, ist ein Banachverband E_λ° ([15], Proposition 1). E_e ist in $E_\lambda^{\circ\circ}$ enthalten ([15], Lemma 2), und so sei schließlich E_λ das von dem kanonischen Bild von e in E_λ° erzeugte abgeschlossene Ideal.

Da I_A für jedes $A \in \mathcal{N}_\lambda$ invariant ist unter T, gilt dies auch für $E_\lambda^{\circ\circ}$, und der durch T im Quotienten $E_\lambda^{\circ\circ}/\{x \in E : ||x||_\lambda = 0\}$ induzierte Quotientenoperator definiert einen positiven Operator T_λ° auf E_λ°, dessen Einschränkung auf E_λ mit T_λ bezeichnet wird ([15], Theorem 1). Wird $S \in \mathcal{L}(E)$ durch T auf E majorisiert, d.h. es gilt $|Sz| \leq cTz$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $z \in E_+$, so können analog auch die Komponenten $S_\lambda \in \mathcal{L}(E_\lambda)$ gebildet werden ([15], Theorem 1).

Die Komponenten $T_\lambda \in \mathcal{L}(E_\lambda)$ von T für $\lambda \in \Lambda$ sind schließlich nach [15], Theorem 2 gleichmäßig mittel-ergodisch mit Projektionen P_λ ,und ihre Quotienten T_λ/I_λ nach den invarianten T_λ-Idealen $\{s_\lambda \in E_\lambda : P_\lambda|x_\lambda| = 0\}$ sind irreduzible positive Operatoren auf E_λ/I_λ ([15], Theorem 2, Cor.).

Mit diesen Bezeichnungen haben nun Miyajima ([15], Theorem 3) und Sawashima und Niiro ([22], Theorem) die folgende Beziehung über die Spektren von T und T_λ bewiesen:

$$(1)\quad \sigma(T) \cap \Gamma = (\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\sigma(T_\lambda)}) \cap \Gamma = (\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\sigma(T_\lambda/I_\lambda)}) \cap \Gamma,$$

wobei Γ der Einheitskreis der komplexen Zahlenebene ist.

Wie Beispiele zeigen ([21], p. 54, counter-example), ist $\sigma(T) \cap \Gamma$ i.a. nicht identisch mit $(\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \sigma(T_\lambda/I_\lambda) \cap \Gamma})$; d.h. das periphere Spektrum von T ist i.a. nicht durch die peripheren Spektren der Operatoren T_λ allein in einer (1) analogen Beziehung gegeben. Daher ist (3.12) keine evidente Folgerung aus (3.2), zumal auch die Beziehungen der Spektralradien von S und S_λ in die Überlegung mit einzubeziehen sind.

In dieser Situation zeigt sich jedoch der Weg über eine Ultraprodukt-Konstruktion wie in [21], p. 51 als fruchtbar. Bevor dieser aber beschritten wird, soll durch die Vorwegnahme der beiden folgenden Lemmata der Beweis von (3.12) etwas übersichtlicher gestaltet werden.

3.10 Lemma. E sei ein Banachverband, $0 \leq T \in \mathscr{L}(E)$, $r(T) = 1$ ein Pol der Resolvente $R(\mu,T)$ und $u \in F_s(T)_+$ ein quasi-innerer Punkt von E_+. Dann ist 1 Pol erster Ordnung von $R(\mu,T)$, und es gibt ein T-Ideal $J \subsetneq E$, so daß der von T auf E/J induzierte positive Operator T_J die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) $r(T_J) = 1$ ist Pol erster Ordnung von $R(\mu,T_J)$.

(b) $\hat{u} \in F(T_J)_+$ ist quasi-innerer Punkt von $(E/J)_+$.

(c) $\pi\sigma(T) = \pi\sigma(T_J)$.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ die Ordnung des Pols von $R(\mu,T)$ an der Stelle $\mu = 1$, und sei $Q := \lim_{\mu \downarrow 1} (\mu-1)^n R(\mu,T)$ der höchste Koeffizient in der Laurententwicklung von $R(\mu,T)$ um $\mu = 1$. Es gilt $Q > 0$ ([27], V. Exc.5(e)), $QT = Q$ und daher ist $J := \{x \in E : Q|x| = 0\}$ ein T-Ideal. Aus

$$Qu = \lim_{\mu \downarrow 1} (\mu-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-k-1} T^k u \leq \lim_{\mu \downarrow 1} (\mu-1)^{n-1} \cdot \mu \cdot u$$

folgt zunächst $n = 1$, denn es ist $Q > 0$ nach Voraussetzung ($r(T) = 1$), insbesondere also $J \neq E$. Die Resolvente $R(\mu,T_J)$ des von T in E/J induzierten Operators T_J besitzt dann nach (2.8) einen Pol der Ordnung $k \leq 1$. Mit $\hat{u} \in E/J$ wird nun das kanonische Bild von u unter der Quotientenabbildung bezeichnet, welches nach [27], II.6.4 quasi-innerer Punkt von $(E/J)_+$ ist. Aus $Tu \leq u$ und $Q(u-Tu) = Qu-Qu = 0$ folgt aber $T_J\hat{u} = \hat{u}$ und damit in diesem Fall die Behauptungen (a) und (b), denn wegen $1 \in \sigma(T_J)$ gilt $k = 1$.

Um (c) zu beweisen, wird zunächst an die Beziehung

$$\sigma(T) \subset \sigma(T_{|J}) \cup \sigma(T_J)$$

erinnert (siehe (2.1)). Da $n = 1$ gilt, folgt nach Wahl von Q und J, daß $R(\mu, T_{|J})$ in einer geeigneten Umgebung von $\mu = 1$ holomorph ist, d.h. es gilt $r(T_{|J}) < 1$. Deshalb ist $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(T_J)$. Die umgekehrte Inklusion folgt aus der Beziehung $\rho_\infty(T) \subset \rho_\infty(T_J)$ (siehe (2.2)).

Das nächste Lemma behandelt eine für den Beweis von (3.12) wichtige Konsequenz aus den oben besprochenen Konstruktionen von [15]; dabei werden auch die dortigen Bezeichnungen verwendet.

3.11 Lemma. Sei E ein Banachverband und T ein gleichmäßig mittel-ergodischer positiver Operator auf E mit Spektralradius $r(T) = 1$ und einem quasi-inneren Fixpunkt $u \in E_+$. Weiter sei $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Λ (siehe Seite 50) und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\alpha_n \in a\sigma(T_{\lambda_n})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Vektor $x_n \in E_{\lambda_n}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $||x_n||_{\lambda_n} = 1$.

(b) $||T_{\lambda_n} x_n - \alpha_n x_n||_{\lambda_n} < 1/n$.

(c) $||P_{\lambda_n}|x_n|\,||_{\lambda_n} \geq 1/2$.

Beweis. Folgende abkürzende Schreibweise wird gewählt: $E_{\lambda_n} =: E_n$, $||.||_{\lambda_n} =: ||.||_n$, $T_{\lambda_n} =: T_n$, $P_{\lambda_n} =: P_n$. Die Voraussetzung $\alpha_n \in \sigma(T_n)$ ergibt zunächst folgendes: für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Folge $(x_n^m)_{m\in\mathbb{N}} \subset E_n$ mit den Eigenschaften

(1) $||x_n^m||_n = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$,

(2) $||T_n x_n^m - \alpha x_n^m||_n < 1/m$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Für jedes Paar $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ sei nun $z_n^m := |T_n x_n^m - \alpha x_n^m|$. Es gilt also $||z_n^m||_n < 1/m$ für alle $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Ein Induktionsargument liefert nun für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$T_n^k |x_n^m| \geq |x_n^m| - \sum_{i=0}^{k-1} T^i z_n^m$$

für alle $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, und dies gibt für jedes $r \in \mathbb{N}$ und alle $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ die Ungleichung

$$(3) \quad 1/r \cdot \sum_{k=0}^{r-1} T_n^k |x_n^m| \geq |x_n^m| - 1/r \cdot \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{i=0}^{k-1} T_n^i z_n^m.$$

Der zweite Term auf der rechten Seite der Ungleichung (3) läßt sich folgendermaßen abschätzen für jedes $(n,m) \in \mathbb{N}^2$:

$$(4) \quad ||1/r \cdot \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{i=0}^{k-1} T_n^i z_n^m||_n \leq 1/r \cdot \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{i=0}^{k-1} ||T_n^i|| \cdot ||z_n^m||_n$$

$$\leq (1/r) \cdot (r(r-1)/2) \cdot ||T_n||^r \cdot ||z_n^m||_n \leq (r-1)/2m \cdot ||T||^r$$

([15], Theorem 1). Nun werden die folgenden Definitionen getroffen:

zunächst wird $r_o \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, daß

$$||1/r_o \cdot \sum_{k=0}^{r_o-1} T^k - P|| < 1/4 \quad \text{gilt.}$$

Nach [15], Theorem 1 folgt dann für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(5) \quad ||1/r_o \cdot \sum_{k=0}^{r_o-1} T_n^k - P_n||_n < 1/4.$$

Sodann sei $m_o \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß

$$(6) \quad (r_o-1)/2m_o \cdot ||T||^{r_o} < 1/4$$

gilt. Schließlich sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ $x_n := x_n^{m_o+n}$.
Mit den Ungleichungen (3), (4), (5) und (6) folgt nun

$$|| P_n|x_n| \; ||_n = || \; P_n|x_n^{m_o+n}| \; ||_n \geq$$

$$\geq ||1/r_o \cdot \sum_{k=0}^{r_o-1} T_n^k|x_n^{m_o+n}| \; ||_n -$$

$$||1/r_o \cdot \sum_{k=0}^{r_o-1} T_n^k - P_n|| \cdot ||x_n^{m_o+n}|| \geq$$

$$\geq ||x_n^{m_o+n}||_n - (r_o-1)/2(m_o+n) \cdot ||T||^{r_o} - 1/4 \geq$$

$$\geq 1 - 1/4 - 1/4 = 1/2.$$

Somit ist für die Folge (x_n) Eigenschaft (c) nachgewiesen, und die Eigenschaften (a) und (b) sind nach

Definition von (x_n) unmittelbar aus (1) und (2) zu entnehmen. Die Behauptung ist also bewiesen.

Eine weitere Bemerkung noch soll unserem Hauptsatz vorausgeschickt werden. Die Bezeichnungen seien wie auf Seite 49ff.

Lemma. Ist T gleichmäßig mittel-ergodisch mit quasi-innerem Fixpunkt, dann gilt sogar
$\sigma(T) \cap \Gamma = (\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} a\sigma(T_\lambda)}) \cap \Gamma$.

Beweis. Die von Miyajima und Niiro und Sawashima hergeleitete Gleichung (vgl. Seite 52) ist

(1) $\sigma(T) \cap \Gamma = (\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma(T_\lambda)}) \cap \Gamma$.

Unsere zusätzliche Behauptung lautet also, daß sich periphere Spektralwerte von T sogar durch Spektralwerte von T_λ aus dem approximativen Punktspektrum approximieren lassen. Dies läßt sich aber leicht aus (1) folgern. Ist nämlich $\alpha \in \sigma(T) \cap \Gamma$, so existiert zunächst eine Folge $(\lambda_n) \subset \Lambda$ und eine Folge $(\alpha_n) \subset \mathbb{C}$ mit $\alpha_n \in \sigma(T_{\lambda_n})$ und $|\alpha - \alpha_n| < 1/n$. Nun sei

$A_n := \{t \in [0,1] : (1-t)\alpha_n + t\alpha \in \sigma(T_{\lambda_n})\}$ und

$t_n := \sup\{t \in [0,1] : t \in A_n\}$.

Wegen der Abgeschlossenheit von $\sigma(T_{\lambda_n})$ ist dann $\beta_n := (1-t_n)\alpha_n + t_n\alpha \in \sigma(T_{\lambda_n})$, und außerdem liegt nach Wahl von t_n stets β_n im topologischen Rand von $\sigma(T_{\lambda_n})$. Dieser ist aber enthalten in $a\sigma(T_{\lambda_n})$ ([31], Theorem V.4.1). Zudem gilt $|\beta_n - \alpha| \leq |\alpha_n - \alpha| < 1/n$. Da $\alpha \in \sigma(T) \cap \Gamma$ beliebig gewählt war, ist unsere Behauptung damit bewiesen.

Nach diesen Vorbereitungen kann nun zu dem bereits erwähnten Resultat übergegangen werden, einer weiteren Verallgemeinerung von (1.3). Es sei an dieser Stelle daran erinnert, daß für $u \in E_+$ das von u in E erzeugte Hauptideal mit E_u bezeichnet wird.

(3.12) Satz. Sei E ein Banachverand, T ein positiver Operator auf E mit $Tu \leq u$ für einen quasi-inneren Punkt $u \in E_+$, und $r(T) = 1$ sei ein Pol der Resolvente von T. Weiter sei S ein stetiger Operator auf E mit der Eigenschaft $|Sz| \leq cTz$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $z \in E_+$, $r(S) = 1$ und $Sw = w$ für ein $w \in E$ mit $E_w = E_u$. Dann gilt $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$.

Beweis. Nach Lemma (3.10) kann zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß u ein Fixpunkt von T und 1 ein Pol erster Ordnung von $R(\mu,T)$ ist. Denn ist $J \subsetneq E$ ein T-Ideal, so besitzt S einen nach [27], II.6.4 quasi-inneren Fixpunkt $\tilde{w}$ in

E/J, weshalb nach (2.5) $r(S_J) = r(S)$ und $\pi\sigma(S_J) \subset \pi\sigma(S)$ gilt (siehe (2.3)).

Nun sei $\alpha \in \pi\sigma(T)$. Nach [22],Theorem und [15] Theorem 3 (siehe Gleichung (1) Seite 52) gibt es dann eine Folge $(\lambda_n) \subset \Lambda$ (siehe Seite 50) und eine Folge $(\alpha_n) \subset \mathbb{C}$ mit $\alpha_n \in \sigma(T_{\lambda_n})$ und $|\alpha - \alpha_n| < 1/n$. Nach dem vorangehenden Lemma kann α_n aus dem approximativen Punktspektrum von T_{λ_n} gewählt werden. Von nun an sollen wieder dieselben Abkürzungen wie im Beweis von (3.11) verwendet werden. Lemma (3.11) liefert nun zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Vektor $x_n \in E_n$ mit den Eigenschaften

(1) $||x_n||_n = 1$,

(2) $||T_n x_n - \alpha_n x_n||_n < 1/n$,

(3) $||\,P_n|x_n|\,||_n \geq 1/2$.

Um den gegebenen Fall auf die Situation von (3.5) zurückzuführen, wird nun nach einer Konstruktion vorgegangen, wie sie in [21], p. 51 im Falle $E = C(X)$ durchgeführt wurde.

Dabei wird von dem Raum $\hat{E} := \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} : z_n \in E_n$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}}||z_n||_n < \infty\}$ ausgegangen. $\hat{E}$ ist mit koordinatenweise definierter linearer Struktur und Ordnung unter der durch $||(z_n)|| := \sup_{n\in\mathbb{N}} ||z_n||_n$ gegebenen Norm ein Banachverband. Auf $\hat{E}$ werden dann durch $\hat{T}(z_n) := (T_n z_n)$, $\hat{P}(z_n) := (P_n z_n)$, $\hat{S}(z_n) := (S_n z_n)$ stetige Operatoren $\hat{T}$, $\hat{P}$ und $\hat{S}$ definiert. Diese lassen das abgeschlossene Ideal $N := \{(z_n) \in \hat{E} : \lim_{\mathcal{U}} ||\,P_n|z_n|\,||_n = 0\}$ invariant, wenn

hier $\mathcal{U}$ einen freien Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ bezeichnet, und induzieren daher auf $\bar{E} := \hat{E}/N$ stetige Operatoren $\bar{T}$, $\bar{P}$ und $\bar{S}$. Deren Einschränkungen auf das von $(u_n) + N$ in E erzeugte abgeschlossene Ideal $\tilde{E}$ werden mit $\tilde{T}$, $\tilde{P}$ und $\tilde{S}$ bezeichnet (u_n sei das kanonische Bild von u in E_n).

Folgende Eigenschaften ermöglichen eine Reduktion auf (3.5).

1. $\tilde{T}$ ist gleichmäßig mittel-ergodisch mit zugehöriger Projektion $\tilde{P}$, erfüllt also insbesondere die Wachstumsbedingung (W). Dies ergibt sich leicht aus den Abschätzungen

$$||1/r\cdot\textstyle\sum_{k=0}^{r-1} \tilde{T}^k - \tilde{P}|| \leq ||1/r\cdot\sum_{k=0}^{r-1} \bar{T}^k - \bar{P}|| \leq$$

$$\leq ||1/r\cdot\textstyle\sum_{k=0}^{r-1} \hat{T}^k - \hat{P}|| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}||1/r\cdot\sum_{k=0}^{r-1} T_n^k - P_n|| \leq$$

$$\leq ||1/r\cdot\textstyle\sum_{k=0}^{r-1} T^k - P||,$$

letzteres nach [15], Theorem 1. Wie bereits erwähnt wurde (Seite 41), gilt in diesem Falle $\pi p\sigma(\tilde{T}) \subset \pi p\sigma(\tilde{T}')$ ([28], Satz 3.2).

2. Nach Konstruktion ist $(u_n) + N$ quasi-innerer Fixvektor von $\tilde{E}$, und wegen $E_u = E_w$ folgt hieraus, daß auch der Betrag des Fixvektors $(w_n) + N$ von $\tilde{S}$ in $\tilde{E}$ ein quasi-innerer Punkt von $\tilde{E}_+$ ist.

3. Es gilt $r(\tilde{T}) = r(\tilde{S}) = 1$: nach [15], Proposition 6 gilt $\rho_\infty(S) \subset \rho_\infty(S_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $||R(\beta,S_n)|| \leq ||R(\beta,S)||$ für alle $\beta \in \rho_\infty(S)$. Hieraus ergibt sich

leicht $\rho_\infty(S) \subset \rho_\infty(\hat{S})$ und so gilt

$$\rho_\infty(S) \subset \rho_\infty(\hat{S}) \subset \rho_\infty(\bar{S}) \subset \rho_\infty(\tilde{S}).$$

Mit $F(\tilde{S}) \neq \{0\}$ liefert dies $1 = r(S) \geq r(\tilde{S}) \geq 1$, also $r(\tilde{S}) = 1$. Die entsprechende Gleichung für $\tilde{T}$ folgt ganz analog.

4. α liegt im Punktspektrum von $\tilde{T}$, nach 1. also auch im Punktspektrum von $\tilde{T}'$. Sei $x := (x_n) + N$, wobei die $x_n \in E_n$ die oben in (1), (2) und (3) aufgeführten Eigenschaften besitzen; (1) liefert dabei $x \in \bar{E}$ und (3) liefert $x \neq 0$; $\bar{T}x = \alpha x$ ergibt sich aus

$$\lim_{\mathcal{U}} || P_n|Tx_n - \alpha x_n| ||_n \leq \lim_{\mathcal{U}} || P_n|T_n x_n - \alpha_n x_n| ||_n$$

$$+ \lim_{\mathcal{U}} || P_n|\alpha_n x_n - \alpha x_n| ||_n = 0.$$

Es bleibt also zu zeigen, daß x bereits in $\tilde{E}$ liegt. Dazu genügt es aber zu bemerken, daß der Fixraum von $\bar{T}$ eindimensional und die Projektion P strikt positiv ist, was im nachstehenden Lemma gezeigt werden soll. Aus $\bar{T}|x| \geq |x|$ und $\bar{P}(\bar{T}|x| - |x|) = \bar{P}|x| - \bar{P}|x| = 0$ folgt dann nämlich $|x| \in F(\bar{T})$, also $|x| = c \cdot ((u_n) + N)$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}_+$.

Da nach 1., 2. und 3. für den Banachverband $\tilde{E}$ und die Operatoren $\tilde{T}$ und $\tilde{S}$ alle Voraussetzungen von (3.5) erfüllt sind, kann nun nach 4. $\alpha \in \pi\sigma(\tilde{S})$ gefolgert

werden. Die in 3. hergeleiteten Beziehungen

$$\rho_\infty(S) \subset \rho_\infty(\hat{S}) \subset \rho_\infty(\bar{S}) \subset \rho_\infty(\tilde{S}) \quad \text{und} \quad r(S) = r(\tilde{S})$$

liefern schließlich das gewünschte Ergebnis $\alpha \in \pi\sigma(S)$.

Lemma. $\bar{E}$ sei der im Beweis von (3.12) konstruierte Banachverband, $\bar{T}$ und $\bar{P}$ seien die dort definierten Operatoren. Dann ist der Fixraum von $\bar{T}$ eindimensional und die Projektion $\bar{P}$ ist strikt positiv.

Beweis. Sei $0 < \bar{z} = (z_n) + N \in \bar{E}$; dann kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ angenommen werden. Nun gilt aber

$$\lim_{\mathcal{U}} || P_n |P_n z_n| \, ||_n = \lim_{\mathcal{U}} || P_n |z_n| \, ||_n > 0,$$

also liegt $(P_n z_n)$ nicht in N und daher ist $\bar{P}\bar{z} = (P_n z_n) + N$ von Null verschieden. Somit ist $\bar{P}$ strikt positiv.

Um auch den zweiten Teil der Behauptung zu beweisen, wird zunächst bemerkt, daß nach [15], Proposition 2 $P_n(E_n) = F(T_n)$ eindimensional ist und von dem in $(E_n)_+$ quasi-inneren Punkt u_n aufgespannt wird. Daher ist P_n von der Form $\mu_n \otimes u_n$ für eine geeignete Linearform $\mu_n \in (E_n)'$, welche wiederum nach [15], Proposition 2, Beweis mit dem Diracmaß δ_{λ_n} auf Λ identifiziert werden kann. Sei nun $\bar{z} = (z_n) + N \in F(\bar{T}) = \bar{P}(\bar{E}) \subset \bar{E}$. Dann wird

$c := \lim \delta_{\lambda_n}(P_n z_n)$ gesetzt. Es zeigt sich, daß

$$\lim_{\mathcal{U}} || P_n|P_n z_n - c\cdot u_n| \, ||_n =$$

$$= \lim_{\mathcal{U}} ||\delta_{\lambda_n}(|P_n z_n - c\cdot u_n|)\cdot u_n||_n =$$

$$= \lim_{\mathcal{U}} |\delta_{\lambda_n}(P_n z_n) - c|\cdot||u_n||_n = 0$$

gilt, also liegt $(P_n z_n - c\cdot u_n)$ in N und dies bedeutet $\tilde{z} = \tilde{P}\tilde{z} = c\cdot(u_n) + N$.

Bemerkungen. 1. Falls w nicht Fixvektor von S ist, aber doch Eigenvektor zu einem unimodularen Eigenwert β, so kann mit den gleichen Argumenten wie oben $\beta\cdot\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$ gefolgert werden.

2. Von dem Operator $\tilde{T}$ wurde im obigen Beweis gezeigt, daß er gleichmäßig mittel-ergodisch ist auf $\tilde{E}$ mit einer strikt positiven mittel-ergodischen Projektion $\tilde{P}$; unter Beachtung der Tatsache, daß $(u_n) + N$ quasi-innerer Punkt von $\tilde{E}_+$ ist, folgt nach [27], III.8.5 so die Irreduzibilität von $\tilde{T}$. Demnach ist also formal auch eine Rückführung von (3.12) auf (3.2) möglich.

3. Wird die Irreduzibilität von $\tilde{T}$ berücksichtigt, so kann auf die Eigenschaft von $|\tilde{w}| := (|w|_n) + N$, quasi-innerer Punkt von $\tilde{E}$ zu sein, verzichtet werden, falls wenigstens $\tilde{w} \neq 0$ gewährleistet ist. Statt der

Voraussetzung $E_u = E_w$ genügt also z.B. die Forderung $|w| \leq c_1 \cdot u \leq c_2 \cdot P|w|$ mit positiven rellen Konstanten c_1 und c_2.

4. Um zu zeigen, daß das periphere Spektrum eines gleichmäßig mittel-ergodischen positiven Operators im allgemeinen nicht in seinem Punktspektrum enthalten ist, wird in [27], V.5, Ex. 1 folgendes Beispiel betrachtet:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei A_n eine positive 2×2-Matrix mit den Eigenwerten 1 und $-1+1/n$. Auf dem zu l^2 isomorphen Banachverband $E := \{(z_n) \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} ||z_n||^2 < \infty\}$ wird dann, unter der Annahme, daß die Operatornormen der Matrizen A_n gleichmäßig beschränkt sind, durch die Vorschrift $A(z_n) := (A_n z_n)$ ein positiver Operator A auf E definiert, dessen Spektralradius $r(A) = 1$ Pol erster Ordnung von $R(\mu,A)$ ist und dessen Spektralwerte $-1+1/n$ $(n \in \mathbb{N})$ in $p\sigma(A)$ liegen, was jedoch nicht für ihren ebenfalls im Spektrum von A liegenden Häufungspunkt -1 gilt.
Da jede der Matrizen A_n einen strikt positiven Fixvektor besitzt, ist die Existenz quasi-innerer Fixpunkte von A klar. Nach Lemma (3.6) liegt -1 daher auch nicht in $p\sigma(A')$ (l^2 besitzt als reflexiver Banachverband ordnungsstetige Norm, [27], II.5.11), und so zeigt es sich, daß das Ergebnis (3.12) nicht in trivialer Weise in (3.5) enthalten ist.

5. Es genügt für die Behauptung von (3.12) nicht, u als quasi-inneren Punkt mit $Tu \geq u$ vorauszusetzen. Dies zeigt das Beispiel der Matrizen

$$S := \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit $\sigma(S) = \{-1/2, 1/2, 1\}$ und $\sigma(T) = \{-1, 1\}$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt:

(a) $\pi p\sigma(T) = \pi p\sigma(T') \subset \pi p\sigma(S')$.

(b) $\dim \mathrm{Ker}(\alpha-T) = \dim \mathrm{Ker}(\alpha-T') \leq \dim \mathrm{Ker}(\alpha-S')$ für alle $\alpha \in \pi p\sigma(T)$.

Beweis. Zunächst wird bemerkt, daß 1 Pol erster Ordnung von $R(\mu,T)$ ist (siehe (2.9)) und $\pi\sigma(T)$ aus lauter Polen der Resolvente besteht ([27], V.5.5). Mit (2.12) folgt so Behauptung (a) aus (3.7)(b).

Um die unter (b) gemachte Aussage zu beweisen, wird zuerst zu dem Quotienten $E_o = E/J$ von E nach dem T-Ideal $J := \{z \in E : P|z| = 0\}$ übergegangen; die auf E_o induzierten Operatoren werden mit T_o, P_o und S_o bezeichnet, und mit u_o bzw. w_o die Bilder von u und w unter der kanonischen Quotientenabbildung $E \to E_o = E/J$. Nach [27], II.6.4;V.5.3;V.Exc.5 besitzen auch u_o, w_o, T_o, P_o, S_o die für u, w, T, P, S vorausgesetzten Eigenschaften; zusätzlich ist noch P_o strikt positiv. P_oE_o ist ein endlichdimensionaler Unterverband von E_o ([27], III.11.5), und daher gibt es nach [27], II.3.9 Cor.1 ein $n \in \mathbb{N}$, so daß P_oE_o isomorph mit $\mathbb{C}^n$ ist. Wird nun mit $\{e_1,\ldots,e_n\}$ die Standard-Basis von $\mathbb{C}^n$ und mit J_k das von e_k in E_o erzeugte abgeschlossene Ideal $(k = 1,\ldots,n)$ bezeichnet, so folgt aus [27],III.8.5 die Irreduzibilität der Einschränkungen $T_k := T_o|_{J_k}$ von T_o für jedes $k \in \{1,\ldots,n\}$. Da der quasi-innere T_o-Fixpunkt u_o in dem nach [27], III.1.2 abgeschlossenen T_o-Ideal $\sum_{k=1}^{n} J_k \supset P_oE_o$ enthalten ist,

muß E_o die ordnungsdirekte Summe der Ideale J_k, $1 \le k \le n$, sein. Insbesondere sind dies Projektionsbänder, welche als T_o-Ideale auch unter S_o invariant sind. Werden mit Q_k, $1 \le k \le n$, nun die entsprechenden Bandprojektionen bezeichnet, so folgt $T_o Q_k u_o = Q_k u_o$ und $S_o Q_k w_o = Q_k w_o$ für alle $k \in \{1,\dots,n\}$ aus der Darstellung von E_o als endliche Summe disjunkter Projektionsbänder. Da u_o und $|w_o|$ quasi-innere Punkte von $(E_o)_+$ sind, gilt $Q_k u_o > 0$ und $|Q_k w_o| = Q_k |w_o| > 0$, also $Q_k w_o \neq 0$, für jedes $k \in \{1,\dots,n\}$. Hieraus folgt $r(T_k) = r(S_k) = 1$, $1 \le k \le n$, wobei $S_k := S|_{J_k}$ gesetzt wurde.

Nach [27], V.5.3 ist 1 ein Pol erster Ordnung von $R(\mu,T_k)$, weshalb mit (2.10) die Existenz einer unter T_k' invarianten Linearform auf J_k folgt. Nach [27], V.5.2 sind daher alle Eigenräume zu unimodularen Eigenwerten von T_k eindimensional, woraus in der gegebenen Situation die Beziehung

$$\dim \operatorname{Ker}(\alpha - T_o) = |\{k \in \{1,\dots,n\} : \alpha \in \pi\sigma(T_k)\}|$$

$(1 \le k \le n,\ |\alpha| = 1)$ folgt. Nach (3.2) gilt aber

$$\{k \in \{1,\dots,n\} : \alpha \in \pi\sigma(T_k)\} \subset \{k \in \{1,\dots,n\} : \alpha \in \pi\sigma(S_k)\},$$

und so ergibt sich schließlich $\dim \operatorname{Ker}(\alpha - T_o) \le$

$$\le |\{k \in \{1,\dots,n\} : \alpha \in \pi\sigma(S_k)\}| \le \dim \operatorname{Ker}(\alpha - S_o)$$

für jedes $\alpha \in \pi\sigma(T_o) = \bigcup_{k=1}^{n} \pi\sigma(T_k)$.
Für alle $k \in \{1,\ldots,n\}$ ist 1 Pol erster Ordnung von $R(\mu,S_k)$ (siehe (2.8)). Die in (3.1) hergeleitete und auf den gegebenen Fall angewandte Beziehung $\alpha S_k = V^{-1}S_kV$ für $\alpha \in \pi\sigma(T_k)$ und eine surjektive Isometrie $V \in \mathcal{L}(J_k)$ liefert demnach die Erkenntnis, daß die Menge $\pi\sigma(T_k) \subset \pi\sigma(S_k)$ für jedes k aus lauter Polen erster Ordnung der Resolvente $R(\mu,S_k)$ besteht. Unter Beachtung von (2.8) zeigt sich somit, daß auch $\pi\sigma(T_o) \subset \pi\sigma(S_o)$ aus lauter Polen der Resolvente $R(\mu,S_o)$ besteht, und zwar Polen erster Ordnung nach (2.9) und [24], App.2.4 . Daher gilt

$$\dim \mathrm{Ker}(\alpha-S_o) = \dim \mathrm{Ker}(\alpha-S_o') \quad \text{für} \quad \alpha \in \pi\sigma(T_o).$$

Bei Berücksichtigung von [21], Lemma 7 folgt schließlich also

$$\dim \mathrm{Ker}(\alpha-T) = \dim \mathrm{Ker}(\alpha-T_o) \leq$$

$$\leq \dim \mathrm{Ker}(\alpha-S_o') \leq \dim \mathrm{Ker}(\alpha-S')$$

für jedes $\alpha \in \pi\sigma(T)$, was zu beweisen war.

Bemerkungen. 1. Unter den Voraussetzungen von (4.1) besteht $\pi p\sigma(T)$ aus lauter Polen erster Ordnung der Resolvente $R(\mu,T)$ ([27], V.5.5 und (2.9)). Daher gilt

$\pi p\sigma(T) = \pi p\sigma(T')$ und $\dim \mathrm{Ker}(\alpha-T) = \dim \mathrm{Ker}(\alpha-T')$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$. Wird nun auch S als positiv vorausgesetzt und für das Residuum von $R(\mu,S)$ bei $\mu = 1$ endlicher Rang gefordert, so kann also (4.1)(a) und (b) in der folgenden Form ausgesprochen werden:

Es gilt $\pi\sigma(T) \subset \pi\sigma(S)$ und

$\dim \mathrm{Ker}(\alpha-T) \leq \dim \mathrm{Ker}(\alpha-S)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$.

Die Aussage (1.3)(b) ist aber natürlich bereits in (4.1) enthalten.

2. Für einen Spektralwert $\alpha \in \pi p\sigma(T)$ wurde im obigen Beweis $\alpha \in \pi p\sigma(S_o)$ gezeigt sowie $\dim \mathrm{Ker}(\alpha-T) = \dim \mathrm{Ker}(\alpha-T_o) \leq \dim \mathrm{Ker}(\alpha-S_o)$. Eine Aussage der Form $\dim \mathrm{Ker}(\alpha-T) \leq \dim \mathrm{Ker}(\alpha-S)$ für alle $\alpha \in \pi p\sigma(T)$ ist also gewährleistet im Falle $E = E_o$. Dies bedeutet gerade die strikte Positivität der mittel-ergodischen Projektion oder, mit anderen Worten, die Radikalfreiheit von T (T heißt radikalfrei, falls der Durchschnitt aller maximalen T-Ideale $\{0\}$ ist; siehe auch [26] für Definition und Eigenschaften). Dabei wird die Poleigenschaft von $r(S)$ bzgl. $R(\mu,S)$ gar nicht verwendet, so daß also folgendes Resultat ausgesprochen werden kann:

4.2 Satz. Sei E ein Banachverband, T ein positiver radikalfreier Operator auf E mit $u \in F(T)_+$ und $r(T) = 1$ ein Pol der Resolvente $R(\mu,T)$ mit endlichdimensionalem Residuum. Weiter sei $S \in \mathcal{L}(E)$, $r(S) = 1$ und $|Sz| \leq cTz$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $z \in E_+$; außerdem gelte $w \in F(S)$ und $|w|$ sei quasi-innerer Punkt von E_+. Dann gilt:

(a) $\pi p\sigma(T) \subset \pi p\sigma(S)$.

(b) $\dim \mathrm{Ker}(\alpha-T) \leq \dim \mathrm{Ker}(\alpha-S)$ für alle $\alpha \in \pi p\sigma(T)$.

Wie im vorigen Kapitel so nimmt auch hier bei der Frage nach den Dimensionen der Eigenräume der Fall $E = C(X)$ eine Sonderstellung ein: die Behauptung von (4.1) läßt sich dann nämlich unter wesentlich geringeren Voraussetzungen beweisen.

4.3 Satz. Sei $E = C(X)$, X kompakt, S und T seien Markoff-Operatoren auf E, T sei mittel-ergodisch und $S \leq cT$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Aussagen

(a) $\pi p\sigma(T) \subset \pi p\sigma(S')$.

(b) $\dim \mathrm{Ker}(\alpha-T) \leq \dim \mathrm{Ker}(\alpha-S')$ für alle $\alpha \in \pi p\sigma(T)$.

Beweis. Sei $\{f_i : i \in I\}$ eine Vektorraum-Basis von $\mathrm{Ker}(\alpha-T)$, $\alpha \in \pi p\sigma(T)$. Zu jedem $i \in I$ gibt es nach [27], V.4.8 ein $\psi_i \in F(T')_+$ mit $\psi_i|f_i| > 0$. Nach [27], II.8.9 ist aber die Abbildung $\psi \to I_\psi := \{f : \psi(|f|) = 0\}$ eine Bijektion von den Extremalpunkten der Menge aller T-invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße auf die Menge aller

maximalen T-Ideale. Ein Satz von Krein-Milman ([24], II. 10.4) liefert daher die Existenz von Linearformen $\phi_i \in F(T')_+$ mit $\phi_i|f_i| > 0$, so daß die Ideale $J_i := \{h \in E : \phi_i|h| = 0\}$ maximale T-Ideale sind. Jedes dieser T-Ideale J_i ist von der Form $\{h \in E : h(A_i) \subset \{0\}\}$ für eine abgeschlossene Teilmenge A_i von X ([27], III.1.Ex.1). Da jeder der Quotienten E/J_i isomorph ist mit $C(A_i)$, $i \in I$, besitzt jeder der von S und T auf E/J_i induzierten Operatoren S_i und T_i nach (2.11) eine invariante Linearform $\nu_i > 0$ bzw. $\mu_i > 0$. Wegen der Irreduzibilität von T_i ([27], III.8.2 Cor 2) existieren nach (3.1) also surjektive Isometrien $V_i \in \mathcal{L}(E/J_i)$ mit $\alpha \cdot S_i = V_i^{-1} S_i V_i$, und so ist $\alpha \in \pi p\sigma(S_i) \cap \pi p\sigma(S_i')$ mit Eigenvektoren $V_i \mathbb{1}_A$ bzw. $V_i' \nu_i$ für jedes $i \in I$. Wird nun $\lambda_i := V_i' \nu_i \circ q_i$ gesetzt, wobei q_i die kanonische Quotientenabbildung $E \to E/J_i$ bezeichnet, so gilt $\lambda_i \in \mathrm{Ker}(\alpha - S')$ und der Träger des Radon-Maßes λ_i ist in A_i enthalten ($i \in I$). Nach [25], Proposition 3 sind die abgeschlossenen Mengen A_i aber paarweise disjunkt, woraus sich die lineare Unabhängigkeit der Maße λ_i ($i \in I$) ergibt. Die Behauptung ist damit gezeigt.

4.4 Korollar. Sei $E = C(X)$, X kompakt. S und T seien mittel-ergodische Markoff-Operatoren auf E mit $S \leq cT$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\dim F(T) \leq \dim F(S)$.

Beweis. Nach (4.3) gilt $\dim F(T) \leq \dim F(S')$, und die Behauptung folgt damit aus $F(S)' = F(S')$.

5. MAJORISIERUNG UND ISOLIERTE SINGULARITÄTEN DER RESOLVENTE

Nachdem das mit dem ersten Kapitel entwickelte Konzept nun durchgeführt ist, geht es hier um eine weitere Fragestellung: wann ist der (positiv) gestörte Spektralradius eines positiven Operators ein Pol der Resolvente? Wie es sich zeigt, steht diese Frage in Zusammenhang mit dem Wachstum des Spektralradius bei der Störung. Daher wird zunächst auf diesen Problemkreis eingegangen. Unsere Untersuchungen beschränken sich im wesentlichen auf den Fall eines Banachverbandes stetiger Funktionen auf einem kompakten Hausdorff-Raum.

Sei zunächst E ein Banachverband, S und T seien positive Operatoren auf E. Die Gleichungen

$$r(S) = \lim_{n\to\infty} ||S^n||^{1/n} \quad \text{und}$$

$$||S^n|| = \sup\{||S^n x|| : x \in E \text{ und } ||x|| \leq 1\} =$$

$$= \sup\{||S^n x|| : x \in E_+ \text{ und } ||x|| \leq 1\}$$

zeigen unmittelbar, daß aus $S \leq T$ die Relation $r(S) \leq r(T)$ resultiert.

Nach [9], IV.3.8 hängt das Spektrum eines Operators zwar i.a. nicht stetig von einer Störung ab, aber doch wenigstens oberhalbstetig ([9], IV.3.1). Zusammen mit der

obigen Bemerkung läßt sich dies folgendermaßen als ein erstes Ergebnis für positive Operatoren aussprechen.

5.1 Satz. Sei E ein Banachverband und S ein positiver Operator auf E. Zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ gibt es dann eine reelle Zahl $\delta > 0$ mit der folgenden Eigenschaft:
Ist T ein positiver Operator auf E, $S \leq T$ und $||T - S|| < \delta$, so gilt $r(T) < r(S) + \varepsilon$.

An einem Beispiel soll noch gezeigt werden, daß hier die Voraussetzung $S \leq T$ ganz wesentlich ist. Dazu eignet sich gerade das Beispiel in [19], Seite 282, welches die i.a. nicht stetige Abhängigkeit des Spektrums vom Operator belegt.
Sei also $E = l^2$. Für jede natürliche Zahl m sei a_m definiert als $a_m = e^{-k}$, wenn m die Darstellung $m = 2^k(2p+1)$ für natürliche Zahlen k und p besitzt. Der positive Operator T wird dann erklärt durch die Beziehung $T(x_m) = (a_m x_{m+1})$ für $(x_m) \in E$. Wie in [19] sodann gezeigt wird, gilt $r(T) > 0$. Dagegen sind die durch

$$T_k e_m := \begin{cases} 0 & \text{für } m = 2^k(2p+1), \\ a_m e_{m+1}, & \text{für } m \neq 2^k(2p+1) \end{cases}$$

vermöge der kanonischen Orthonormalbasis $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ definierten positiven Operatoren nilpotent. Dennoch gilt $||T - T_k|| = e^{-k}$.

Weiter zeigt sich nun, daß aber im Falle $E = C(X)$ sogar eine ganz bestimmte Form der stetigen Abhängigkeit des Spektralradius vorliegt.

5.2 Satz. Sei $E = C(X)$, X ein kompakter Hausdorff-Raum, und $S \in \mathcal{L}(E)$ ein positiver Operator, welcher eine strikt positive Eigenfunktion besitzt. Dann gibt es eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, so daß für jeden positiven Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ die Beziehung
$|r(T) - r(S)| \leq L \cdot ||T - S||$ gilt.

Beweis. Sei $Sf = \alpha f$, $\alpha \in \mathbb{C}$ und f strikt positiv. Dann wird zunächst gezeigt, daß $\alpha = r(S)$ gilt. Nach (2.11) gibt es eine von Null verschiedene positive Linearform $\phi \in E'$ mit der Eigenschaft $S'\phi = r(S)\phi$. Damit ergeben sich die Gleichungen

$$\alpha \cdot \langle f, \phi \rangle = \langle Sf, \phi \rangle = \langle f, S'\phi \rangle = r(S) \cdot \langle f, \phi \rangle .$$

Da $\phi \neq 0$ und f strikt positiv ist, gilt $\langle f, \phi \rangle \neq 0$ und so folgt $\alpha = r(S)$.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $||f|| = 1$ angenommen werden. Da f als strikt positiv vorausge-

setzt wurde, gibt es in $C(X)$ eine Funktion $g > 0$ mit der Eigenschaft $f \cdot g = \mathbb{1}$. Daher ist $L := ||g|| < \infty$ und es gilt offenbar $\mathbb{1} \leq L \cdot f$.
Für $N := T - S$ folgt aus $||Nf|| \leq ||N||$ zunächst $|Nf| \leq ||N|| \cdot \mathbb{1}$ und damit

$$0 \leq Tf = Sf + Nf \leq r(S) \cdot f + ||N|| \cdot \mathbb{1} \leq (r(S) + L \cdot ||N||) f.$$

Dies hat nun für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$||T^n|| = ||T^n \mathbb{1}|| \leq L \cdot ||T^n f|| \leq$$

$$\leq L \cdot ||(r(S) + L \cdot ||N||)^n \cdot f|| \leq L \cdot (r(S) + L \cdot ||N||)^n$$

zur Folge, woraus sich unmittelbar $r(T) \leq r(S) + L \cdot ||N||$ ergibt.

Um $r(T)$ nach unten abzuschätzen, werden zwei Fälle unterschieden:
(i) $r(S) \leq L \cdot ||N||$. Dies bedeutet aber bereits direkt $r(T) - r(S) \geq -(L \cdot ||N||)$.
(ii) $r(S) > L \cdot ||N||$. Wie oben gezeigt wurde, gilt $|Nf| \leq ||N|| \cdot \mathbb{1}$ und somit $|Nf| \leq L \cdot ||N|| \cdot f$, also

$$Tf = Sf + Nf \geq (r(S) - L \cdot ||N||) f > 0.$$

Hieraus folgt nun für alle $n \in \mathbb{N}$

$$||T^n|| \geq ||T^n f|| \geq ||(r(S) - L \cdot ||N||)^n f|| =$$

$$(r(S) - L \cdot ||N||)^n,$$

also schließlich $r(T) \geq r(S) - L \cdot ||N||$. Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Bemerkung. Die bewiesene Ungleichung gilt i.a. nicht, falls S keinen strikt positiven Eigenvektor besitzt. Dies zeigt das Beispiel der Matrizen

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad N_n := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/n & 0 \end{bmatrix} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Hier ist nämlich $r(S + N_n) = 1 + n^{-1/2}$, $r(S) = 1$ und $||N_n|| = 1/n$; es gibt aber keine Konstante $L \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $n^{-1/2} \leq L \cdot n^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Als nächstes werden zwei einfache Bedingungen angegeben, die im Falle $S < T$ die Relation $r(S) < r(T)$ sichern.

5.3 Satz. Sei E ein Banachverband, $0 \leq S < T \in \mathcal{L}(E)$ und T sei irreduzibel. Weiter sei eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) Es gibt $x \in E_+\backslash\{0\}$ und $\phi \in E'_+\backslash\{0\}$ mit $Sx = r(S)x$ und $T'\phi = r(T)\phi$.

(b) Es gibt $\psi \in E'_+\backslash\{0\}$ und $y \in E_+\backslash\{0\}$ mit $S'\psi = r(S)\psi$ und $Ty = r(T)y$.

Dann gilt $r(S) < r(T)$.

Beweis. Sei zunächst Voraussetzung (a) erfüllt. Unter der Annahme $r(S) = r(T)$ folgt $Tx \geq Sx = r(S)x = r(T)x$. Wegen der Irreduzibilität von T ist ϕ strikt positiv, was bei Beachtung von

$$\langle Tx - r(T)x, \phi\rangle = \langle x, T'\phi\rangle - r(T)\langle x, \phi\rangle = 0$$

die Gleichung $Tx = r(T)x$ zur Folge hat. Damit ist x also quasi-innerer Punkt von E_+. Mit $(T - S)x = r(T)x - r(S)x = 0$ und mit der wegen $\overline{E_x} = E$ folgenden Gleichung $T - S = 0$ resultiert so ein Widerspruch zur Voraussetzung $S < T$. Die Annahme $r(S) = r(T)$ ist daher falsch, und es folgt $r(S) < r(T)$.
Ist (b) anstatt der Voraussetzung (a) erfüllt, so kann ganz analog argumentiert werden.

Bemerkung. Eine ähnliche Aussage wie in (5.3) wird in [14] unter Verwendung eines Min-Max-Prinzips bewiesen.

5.4 Korollar. Sei $E = C(X)$, $0 \leq S < T \in \mathcal{L}(E)$ und T irreduzibel. Falls $r(S)$ oder $r(T)$ Pol der Resolvente $R(\mu,S)$ bzw. $R(\mu,T)$ ist, so gilt $r(S) < r(T)$.

Beweis. Nach (2.11) besitzt sowohl S' als auch T' einen positiven Eigenvektor zum Eigenwert $r(S)$ bzw. $r(T)$. Falls nun $r(S)$ oder $r(T)$ Pol der Resolvente $R(\mu,S)$ bzw. $R(\mu,T)$ ist, so besitzt nach (2.10) auch S bzw. T einen positiven Eigenvektor zum Eigenwert $r(S)$ bzw. $r(T)$, so daß in jedem Falle also eine der Bedingungen (a) und (b) von (5.2) erfüllt ist.

Ein Schlüssel zur Anwendung von (5.3) auf weitere Untersuchungen ist der nun folgende in [5] bewiesene Sachverhalt.

5.5 Satz. S und T seien stetige lineare Operatoren auf dem Banachaum E. Ist der Operator $T - S$ kompakt und gilt $r(S) < r(T)$, so besteht $\pi\sigma(T)$ aus lauter Polen der Resolvente von T mit endlichdimensionalen Residuen.

Beweis. Die Aussage ergibt sich unmittelbar aus den in [5] bewiesenen Resultaten VIII.8.2, VII.4.5 und VII.3.20 (vgl. auch [13]).

Mit Hilfe von (5.3) und (5.5) ergeben sich jetzt die folgenden Äquivalenzen.

5.6 Satz. Sei E ein Banachverband, $0 \leq S < T \in \mathcal{L}(E)$ und T sei irreduzibel. Weiter sei $T - S$ ein kompakter Operator und S besitze einen positiven Eigenvektor zum Eigenwert $r(S)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $r(T) > r(S)$.

(b) $\pi\sigma(T)$ besteht aus lauter Polen der Resolvente von T.

(c) T' besitzt einen positiven Eigenvektor zum Eigenwert $r(T)$.

Beweis. Die Implikation (a)$\Rightarrow$(b) folgt aus (5.5), (b)$\Rightarrow$(c) gilt nach (2.10) und (c)$\Rightarrow$(a) nach (5.3).

Im Falle $E = C(X)$ treten die in (5.6) genannten äquivalenten Aussagen bereits unter schwächeren als den dort aufgeführten Voraussetzungen ein: ein positiver Eigenvektor für S braucht nicht explizit gefordert zu werden.

5.7 Korollar. Sei $E = C(X)$, $0 \leq S < T \in \mathcal{L}(E)$, $\pi p\sigma(S) \neq \emptyset$, $T - S$ kompakt und T irreduzibel. Dann besteht $\pi\sigma(T)$ aus lauter Polen der Resolvente von T.

Beweis. Angenommen, es sei $r(S) = r(T)$. Da $\pi p\sigma(S) \neq \emptyset$ vorausgesetzt wurde, gibt es $x \in E\setminus\{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = r(S)$, mit $Sx = \alpha x$. Dies liefert $S|x| \geq |Sx| = r(S)\cdot|x|$. Nach (2.11) gibt es außerdem ein $\phi \in E'_+\setminus\{0\}$

mit $T'\phi = r(T)\phi$, welches wegen der Irreduzibilität von T strikt positiv ist. Aus

$$\langle S|x| - r(S)|x|,\phi\rangle = \langle |x|,S'\phi\rangle - r(S)\cdot\langle |x|,\phi\rangle \leq$$

$$\leq \langle |x|,T'\phi\rangle - r(T)\cdot\langle |x|,\phi\rangle = 0$$

folgt also $S|x| = r(S)|x|$. Damit sind die Voraussetzungen von (5.6) erfüllt, und die Existenz von ϕ liefert die Relation $r(T) > r(S)$. Dies steht aber im Widerspruch zur Annahme $r(S) = r(T)$. Also ist diese falsch, und die Behauptung folgt nun mit $r(S) < r(T)$ aus (5.5).

Es soll hier gleich angemerkt werden, daß auf die Voraussetzung $\pi p_\sigma(S) \neq \emptyset$ in (5.7) nicht ohne weiteres verzichtet werden kann. Als Beispiel dafür kann Ex.4 in [12] dienen. Dazu sei X ein unendlicher kompakter Hausdorff-Raum und ϕ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf X, dessen Träger X ist. Nun wird $0 \leq g \in C(X)$ gewählt mit $||g|| = 1$, so daß $1 - g$ eine schwache Ordnungseinheit ist (siehe [27], Seite 55). S sei dann der durch $Sf := g\cdot f$ $(f \in C(X))$ definierte Multiplikationsoperator und N der vermöge $Nf := \langle f - gf,\phi\rangle\cdot\mathbb{1}$ gegebene positive Operator. Schließlich wird $T := S + N$ gesetzt. N ist irreduzibel und als Operator endlichen Ranges kompakt. Daher ist T irreduzibel und $T - S$ kompakt. Da N von Null verschieden ist, gilt außerdem $S < T$. Die Gleichung

$r(S) = 1$ ist klar. Wie in [12] gezeigt wird, gilt aber $r(T) = 1$ und $\pi p\sigma(T) = \emptyset$; also liegt kein Pol von $R(\mu,T)$ im peripheren Spektrum von T. Nach (5.7) liegt dies natürlich daran, daß auch $\pi p\sigma(S) = \emptyset$ ist, wie leicht eingesehen werden kann.

Andererseits kann aber auch nicht ohne weiteres auf die Irreduzibilität von T verzichtet werden. Um dies zu zeigen, sei X das abgeschlossene Intervall $[0,1]$ und $E = C(X)$. Weiter sei S die Identität auf E und N der durch $Nf(s) := \int_0^s f(t)\,dt$ definierte Volterra-Operator. N ist kompakt, und es gilt $r(N) = \{0\}$. Außerdem ist leicht zu erkennen, daß der Spektralwert 0 nicht im Punktspektrum von N liegt. Für den Operator $T := S + N$ ergeben sich daher die Eigenschaften $r(T) = 1$, $1 \notin p\sigma(T)$ und die Kompaktheit von $T - S$. Zu den Voraussetzungen von (5.7) fehlt also lediglich die Irreduzibilität von T: obwohl andererseits $r(S) = 1$ sogar Pol erster Ordnung der Resolvente von S ist, gilt $r(T) \notin p\sigma(T)$, also ist $r(T)$ kein Pol von $R(\mu,T)$.

Wird allerdings durch eine geeignete Voraussetzung dafür gesorgt, daß das Bild von E unter dem Operator N nicht im T-Radikal, dem Durchschnitt aller maximalen T-Ideale, enthalten ist, so läßt sich die gewünschte Aussage leicht auf die Situation von (5.7) zurückführen.

5.8 Korollar. Sei $E = C(X)$, $S \in \mathcal{L}(E)$ ein Markoff-Operator, $N \in \mathcal{L}(E)$ ein kompakter positiver Operator und $(S^{\circ}N)\mathbb{1}$ sei eine strikt positive Funktion. Dann besteht das periphere Spektrum von $S + N$ aus lauter Polen der Resolvente $R(\mu, S + N)$.

Beweis. Die strikte Positivität von $(S^{\circ}N)\mathbb{1}$ bewirkt, daß $N\mathbb{1}$ in keinem von E verschiedenen S-Ideal enthalten ist, also auch nicht im T-Radikal, dem Durchschnitt aller maximalen T-Ideale ([27], III.8.1), wobei $T := S + N$ gesetzt wird. Es gibt also ein maximales T-Ideal J mit $N\mathbb{1} \notin J$. Nun werden der Quotient E/J und die auf ihm induzierten Operatoren S_J und T_J betrachtet. Nach der Wahl von J gilt $S_J < T_J$ und nach [27], III.8.2 Cor. ist T_J irreduzibel. Da E/J mit einem Raum $C(K)$, K kompakt, identifiziert werden kann ([27], II.7.4), gibt es ein $\phi \in (E/J)'_+ \setminus \{0\}$ mit $T_J'\phi = r(T_J)\phi$. Mit S ist aber auch S_J ein Markoff-Operator, und so folgt

$$r(T_J) > r(S_J) = r(S) = 1$$

aus (5.3). Unter Beachtung von $r(T) \geq r(T_J)$ (siehe (2.5)) folgt die Behauptung nun aus (5.5).

Nach diesen Betrachtungen von kompakten Störungen soll nun die Frage, wann unter der Voraussetzung "$0 \leq S \leq T$" $r(T)$ ein Pol der Resolvente ist, noch in einer ande-

ren Situation angegangen werden. Hier erweist sich der Begriff der Quasikompaktheit als zweckmäßig: $S \in \mathcal{L}(E)$ heißt quasikompakt, falls eine natürliche Zahl n und ein kompakter Operator $K \in \mathcal{L}(E)$ existieren, so daß $||S^n - K|| < 1$ gilt; dies hat natürlich zur Folge, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ und einen kompakten Operator $K_m \in \mathcal{L}(E)$ gibt mit $||S^m - K_m|| < \varepsilon$. Nach (5.5) und der Beobachtung, daß $\alpha \neq 0$ ein Pol der Resolvente $R(\mu,T)$ mit endlichdimensionalem Residuum ist, falls dies für α^n und $R(\mu,T^n)$ gilt (siehe den Beweis von [5], VIII.8.2), ist im Falle $r(S) = 1$ jedes $\alpha \in \pi\sigma(S)$ Pol mit endlichdimensionalem Residuum. Für positive Operatoren $S \in \mathcal{L}(E)$ sei an die Tatsache erinnert, daß $r(S) \in \pi\sigma(S)$ in diesem Fall sogar einen positiven Eigenvektor besitzt (siehe (2.10)). Die im nächsten Satz gestellte Forderung an den Eigenraum zu $r(S)$ bezieht sich also lediglich darauf, daß einer der bereits wegen der Poleigenschaft existierenden positiven Eigenvektoren sogar strikt positiv ist (Für den Begriff des Sub-Markoff-Operators siehe Seite 19).

5.9 Satz. Sei $E = C(X)$, $0 \leq S \in \mathcal{L}(E)$ und $r(S) = 1$ Pol von $R(\mu,S)$ mit einem strikt positiven Eigenvektor. Weiter sei $0 \leq T \in \mathcal{L}(E)$, $r(T) = 1$, $S \leq cT$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und $Tg \leq r(T)g$ für eine strikt positive Funktion $g \in E_+$.
Ist der Operator S dann quasikompakt, so gilt dasselbe auch für T.

Beweis. Sei $f = Sf$ strikt positiv. Statt S kann der durch $\tilde{S}h := f^{-1} \cdot S(fh)$ definierte Markoff-Operator und statt T der durch $\tilde{T}h := g^{-1} \cdot T(gh)$ $(h \in E)$ definierte Sub-Markoff-Operator betrachtet werden: mit S ist nämlich auch $\tilde{S}$ quasikompakt. Denn falls $n \in \mathbb{N}$ und $K \in \mathcal{L}(E)$ kompakt gegeben sind mit

$$||S^n - K|| = \delta < ||f^{-1}||^{-1},$$

so folgt mit der Definition $\tilde{K}h := f^{-1}K(fh)$ für alle $h \in E$

$$(\tilde{S}^n - \tilde{K})h = f^{-1}S^n(fh) - f^{-1}K(fh) = f^{-1}(S^n(fh) - K(fh)),$$

also $||\tilde{S}^n - \tilde{K}|| \leq ||f^{-1}|| \cdot ||S^n - K|| < 1,$

da ohne Beschränkung der Allgemeinheit $||f|| \leq 1$ gewählt werden kann. Die in den Voraussetzungen gegebene Konstante c ist also lediglich durch die Konstante

$$c' = ||f|| \cdot ||f^{-1}|| \cdot ||g|| \cdot ||g^{-1}|| \cdot c$$

zu ersetzen und kann jedenfalls größer als 1 angenommen werden.

Nach Voraussetzung gibt es also $n \in \mathbb{N}$ und einen kompakten Operator $K \in \mathcal{L}(E)$ mit $||\tilde{S}^n - \tilde{K}|| =: \delta < 1$.

Es gilt $(c^n\tilde{T}^n - \tilde{S}^n)\mathbb{1} \leq (c^n - 1) \cdot \mathbb{1}$ und wegen der Positivität des Operators $c^n\tilde{T}^n - \tilde{S}^n$ hat dies

$||c^n\tilde{T}^n - \tilde{S}^n|| \leq c^n - 1$ zur Folge. Somit ergibt sich die Abschätzung

$$||\tilde{T}^n - c^{-n}\tilde{K}|| \leq c^{-n}||c^n\tilde{T}^n - \tilde{S}^n|| + c^{-n}||\tilde{S}^n - \tilde{K}|| \leq$$

$$c^{-n}(c^n - 1) + c^{-n}\cdot\delta = 1 - c^{-n}(1-\delta) < 1.$$

Hiermit ist die Quasikompaktheit von $\tilde{T}$ erwiesen, und wie oben bemerkt wurde, liefert dies die Quasikompaktheit von T.

Bemerkungen. 1. Die Voraussetzung, daß S und T strikt positive Fixvektoren bzw. Sub-Fixvektoren besitzen, ist nicht überflüssig. Um dies zu zeigen sei zunächst $E = l^\infty = C(\beta\mathbb{N})$, S der durch die unendliche Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/3 & & 1/2 & & \\ 1/4 & & & 1/2 & \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \end{bmatrix}$$

und T der durch die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & & \\ 1/3 & & 2/3 & & & \\ 1/4 & & & 3/4 & & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \end{bmatrix}$$

definierte positive Operator.

Hier ist zwar S quasikompakter Sub-Markoff-Operator und T Markoff-Operator, aber 1 ist nicht isoliert in $\sigma(T)$, also kein Pol von $R(\mu,T)$, denn es ist $n/(n+1) \in p\sigma(T)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Zum andern sei auf $E = l^{\infty}$ S vermöge der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & & \\ 1/2 & & 1/2 & & & \\ 1/2 & & & 1/2 & & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \end{bmatrix} ,$$

N vermöge der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & & \\ 1/2 & & 2/3 & & & \\ 1/2 & & & 3/4 & & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \end{bmatrix},$$

definiert, und es sei $T := r(N)^{-1}.N$. S ist hier quasikompakter Markoff-Operator, aber $r(T)$ ist nicht isoliert in $\sigma(T)$, also kein Pol.

2. Es gilt keine derartige Umkehrung von (5.9), daß unter denselben Voraussetzungen die Quasikompaktheit von S aus der von T geschlossen werden kann. Um dies zu sehen, sei $E := l^\infty$, S gegeben durch

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & & \\ 1/3 & & 2/3 & & & \\ 1/4 & & & 3/4 & & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \end{bmatrix}$$

und T gegeben durch

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & & \\ 1/2 & & 1/2 & & & \\ 1/2 & & & 1/2 & & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \end{bmatrix}$$

Es gilt $S \leq 2T$. S ist hier Markoff-Operator, aber 1 ist nicht isoliert in $\sigma(S)$, also insbesondere kein Pol, denn es gilt $n/(n+1) \in p\sigma(S)$ für alle $n \in \mathbb{N}$; T dagegen ist Markoff-Operator und quasikompakt.

5.10 Korollar. Sei $E = C(X)$, $0 \leq S \in \mathscr{L}(E)$ irreduzibel, $r(S) = 1$ Pol von $R(\mu,S)$. Weiter sei $0 \leq T \in \mathscr{L}(E)$, $r(T) = 1$ und $S \leq cT$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

(a) $\pi p\sigma(T) \neq \emptyset$.

(b) 1 ist Pol von $R(\mu,T)$.

Beweis. S besitzt einen positiven Fixvektor (siehe (2.10)), welcher strikt positiv ist wegen der Irreduzibilität von S. Da mit S auch T irreduzibel ist, folgt strikte Positivität für die nach (2.11) existierende positive invariante Linearform $\phi \in E'$. Sei nun $Tx = \alpha x \neq 0$, $|\alpha| = 1$. Aus $T|x| \geq |x|$ und $T'\phi = \phi$ (ϕ strikt positiv) folgt, wie in Bemerkung 1 zu (3.2) ausgeführt wurde, $T|x| = |x|$, und wiederum wegen der Irreduzibilität von T ist $|x|$ damit strikt positiver Fixvektor von T. Die Implikation (a)$\Rightarrow$(b) folgt nunmehr unmittelbar aus (5.9). Für die Umkehrung braucht nur [24], App., Seite 260 zitiert zu werden.

Bemerkungen. 1. Ist eine der beiden äquivalenten Bedingungen (a) und (b) erfüllt, so besteht nach einem Satz von Niiro und Sawashima ([27], V.5.4) das periphere

Spektrum von T (wie übrigens auch das periphere Spektrum von S) aus lauter Polen erster Ordnung.

2. Die Voraussetzungen von (5.10) implizieren nicht bereits die Gültigkeit der Bedingungen (a) und (b). Dies kann an dem oben aufgeführten Beispiel aus [12] (siehe die Ausführungen nach (5.7)) demonstriert werden: S ist dort irreduzibel und kompakt mit $r(S) > 0$ (also $r(S)$ Pol), aber $r(T)$ liegt nicht im Punktspektrum von T.

3. Auf die Irreduzibilität von S kann in (5.10) nicht ohne weiteres verzichtet werden. Um dies einzusehen genügt es, für E den Banachverband $l^\infty = C(\beta\mathbb{N})$ zu betrachten, für S die Identität auf E und für T den durch

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & & & \\ & 1/2 & 1/2 & & \\ & & 1/2 & 1/2 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

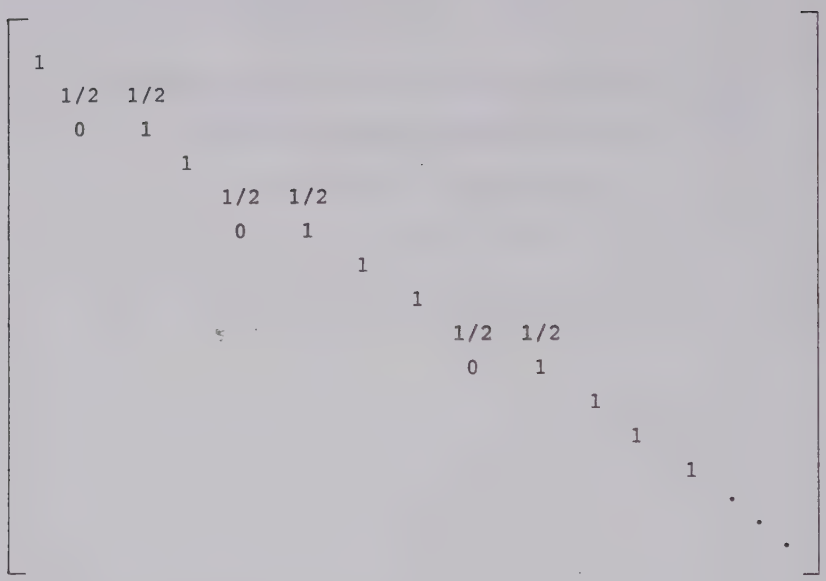
definierten Markoff-Operator auf E: 1 ist natürlich Pol von $R(\mu,S)$, aber 1 ist nicht isoliert in $\sigma(T) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 1/2| \leq 1/2\}$.

4. Selbst in dem Falle, daß S und N als Markoff-Operatoren auf einem Raum $C(X)$ mit Polen erster Ordnung in

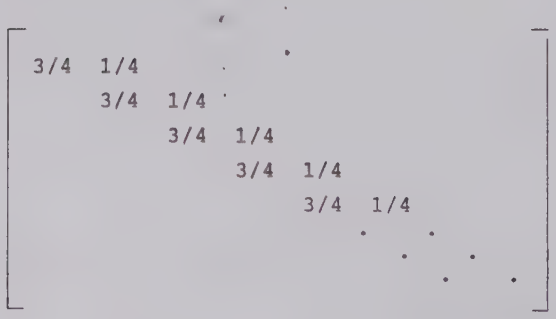
$\mu = 1$ vorausgesetzt werden, ist nicht gewährleistet, daß auch $T := 1/2 \cdot (S + N)$ diese Eigenschaft besitzt (allerdings kann hier für S nicht mehr die Identität gewählt werden, um ein Gegenbeispiel anzugeben). Sei dazu wieder $E := l^{\infty}$, S sei definiert durch die Matrix

$$\begin{bmatrix}
1/2 & 1/2 & & & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 1/2 & 1/2 & 0 & & & & & \\
 & & 0 & 1/2 & 1/2 & & & & & \\
 & & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \\
 & & & & & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \\
 & & & & & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & & & & & & & & \ddots
\end{bmatrix}$$

und N vermöge



so daß der Operator T dann durch



gegeben ist. S, N und T sind Markoff-Operatoren auf l^∞, die Resolventen von S und N besitzen in $\mu = 1$ einen Pol der ersten Ordnung, dagegen ist 1 nicht isoliert in $\sigma(T) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 3/4| \leq 1/4\}$.

Die oben aufgeführten Beispiele zeigen, daß die Frage, wann unter der Voraussetzung $0 \leq S \leq cT$ mit $r(S)$ auch $r(T)$ Pol ist, selbst im Falle $E = C(X)$ sich nicht ohne weitere Bedingungen an den störenden Operator $N := cT - S$ positiv beantworten läßt. Gerade an dieser Stelle sollen jetzt (statt der in (5.10) geforderten Irreduzibilität von S) zusätzliche Voraussetzungen gemacht werden. Um das Ergebnis in (5.13) herzuleiten, werden einige vorbereitende Resultate vorweggenommen.

5.11 Lemma. Sei $E := C(X)$ und seien $S,T \in \mathcal{L}(E)$ Markoff-Operatoren mit der Eigenschaft $S \leq cT$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Ist $R \subset E$ ein T-Ideal mit $r(S_{|R}) = 1 - \delta$, $\delta > 0$, so folgt $r(T_{|R}) \leq 1 - c^{-1} \cdot \delta$.

Beweis. Wegen $0 \leq S \leq cT$ (ohne Einschränkung sei $c \geq 2$) ist R auch unter S invariant, und die entsprechenden Einschränkungen sind wohldefiniert. Nach Voraussetzung gibt es nun $n_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_o$ die Beziehung $||(S_{|R})^n||^{1/n} < 1 - \delta + \varepsilon$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt. Damit sind folgende Abschätzungen möglich: für alle $n \geq n_o$ gilt

$$c^n \cdot ||(T_{|R})^n|| = ||(cT - S + S)_{|R}{}^n|| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} ||(cT - S)_{|R}||^{n-i} \cdot ||S_{|R}{}^i|| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n_o} \binom{n}{i} (c - 1)^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (c - 1)^{n-i} (1 - \delta + \varepsilon)^i \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n_o} n^{(n_o)} \cdot (c-1)^n + (c-\delta+\varepsilon)^n =$$

$$= n_o \cdot n^{(n_o)} \cdot (c-1)^n + (c-\delta+\varepsilon)^n .$$

Dies ergibt also für alle $n \geq n_o$

$$||T_{|R}^n|| \leq (n_o \cdot n^{(n_o)} \cdot ((c-1)/c)^n + (c-\delta+\varepsilon)/c)^n$$

und somit

$$r(T_{|R}) = \lim_{n\to\infty} ||T_{|R}^n||^{1/n} \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} ((n_o \cdot n^{n_o+1}) \cdot ((c-\delta+\varepsilon)/c)^n)^{1/n} = 1 - c^{-1} \cdot \delta + \varepsilon ,$$

denn ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\delta < 1$ angenommen werden. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt so die Behauptung.

Die für $r(T_{|R})$ angegebene obere Schranke $1 - c^{-1} \cdot \delta$ wird sogar von Markoff-Operatoren auf $E = \mathbb{C}^2$ angenommen:

Sei $S := \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $T := \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Hier muß $c \geq 3$ gewählt werden. Das T-Ideal R sei das von $e_1 = (1,0)$ erzeugte Ideal. Es ist $r(S_{|R}) = 1/4$,

d.h. $\delta = 3/4$. Für die obere Schranke von $r(T_{|R}) = 3/4$ ergibt sich also $s(c) = 1 - c^{-1} \cdot 3/4 \geq 3/4$ und $s(3) = 3/4$. Bei der "günstigsten Wahl" von $c = 3$ gilt also $s(c) = r(T_{|R})$.

Die Idee zum Beweis von (5.13) besteht in einer Zurückführung von S und T auf irreduzible Komponenten, wo dann (5.10) angewandt werden kann. Solch eine Reduktion wurde oben beim Beweis von (3.12) bereits benutzt, läßt sich aber im Fall $E = C(X)$ wesentlich einfacher darstellen. Sei dazu T ein Sub-Markoff-Operator auf $C(X)$. Nach [25], Proposition 1 gibt es maximale T-Ideale, und jedes dieser Ideale ist von der Form $\{z \in E : \phi|z| = 0\}$ für ein $\phi \in F(T')_+$.
Nun sei $\{J_i : i \in I\}$ die Menge aller maximalen T-Ideale und $\{\phi_i : i \in I\}$ die Menge der zugehörigen unter T' invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße, d.h. es ist $J_i = \{z \in E : \phi_i|z| = 0\}$. Das T-Radikal $\bigcap_{i \in I} J_i$ wird dann mit R bezeichnet. Für jedes $i \in I$ sei weiter E_i der Quotientenraum E/J_i, welcher als AM-Raum mit Einheit isomorph zu einem Raum $C(X_i)$, (X_i kompakt) ist, und T_i sei der von T auf $E = C(X_i)$ induzierte Sub-Markoff-Operator. Unter Verwendung dieser Bezeichnungen läßt sich der folgende Sachverhalt beweisen.

5.12 Satz. Sei $E = C(X)$ und T Sub-Markoff-Operator auf E. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(a) 1 ist Pol erster Ordnung von $R(\mu,T)$.

(b) 1 ist isoliert in $\sigma(T)$, es gilt $r(T_{|R}) < 1$, und für jedes $i \in I$ ist 1 Pol der Ordnung $n_i \leq 1$ von $R(\mu,T_i)$.

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b): Die Isoliertheit von 1 in $\sigma(T)$ ist nach Voraussetzung klar, $r(T_{|R}) < 1$ ergibt sich aus dem Lemma nach Theorem 4 in [26], denn nach (2.9) ist T gleichmäßig mittel-ergodisch, und der Rest der Behauptung ist [27], V.5.3 zu entnehmen.

(b)$\Rightarrow$(a): Nach [27], V.5.3 genügt es zu zeigen, daß 1 Pol erster Ordnung des von T auf E/R induzierten Operators T_R ist. Da T_R aber radikalfrei ist, d.h. das T_R-Radikal ist $\{0\}$ ([26], Proposition 8), kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $R = \{0\}$ angenommen werden.

Nach Voraussetzung gibt es $0 < r \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $A := \{\alpha \in \mathbb{C} : 0 < |\alpha - 1| \leq r\} \subset \rho_\infty(T)$ und nach (2.2) folgt $A \subset \rho_\infty(T_i)$ für jedes $i \in I$. Da $R(\mu,T_i)$ in 1 einen Pol der Ordnung $n_i \leq 1$ besitzt, ist $(\mu - 1)\cdot R(\mu,T_i)$ holomorph in $\bar{A} = A \cup \{1\}$. $\bar{A}$ ist aber kompakt und deshalb gilt

$$M_i := \max_{\mu \in \bar{A}} ||(\mu - 1)\cdot R(\mu,T_i)|| < \infty \quad \text{für jedes } i \in I.$$

Nach dem Rand-Maximum-Prinzip (siehe z.B. [6], Theorem 3.13.1) existiert zu jedem $i \in I$ ein $\mu_i \in \mathbb{C}$,

$\mu_i \in K := \{\mu \in A : |\mu - 1| = r\}$

mit der Eigenschaft

$M_i = \{||(\mu_i - 1)\cdot R(\mu_i, T_i)||.$

Nach [21], 3.Cor.1 gilt aber $||R(\mu,T_i)|| \leq ||R(\mu,T)||$ für alle $\mu \in \rho_\infty(T)$ und alle $i \in I$. Dies hat also $\sup_{i\in I} M_i \leq \max_{\mu\in K} ||R(\mu,T)|| < \infty$ zur Folge, wobei in der zweiten Ungleichung die Tatsache berücksichtigt wird, daß K eine kompakte Teilmenge von $\rho_\infty(T)$ ist. Da T ohne Beschränkung der Allgemeinheit als radikalfrei angenommen wurde, folgt unter Berücksichtigung des nachfolgenden Lemmas schließlich

$\sup_{\mu\in A} ||(\mu - 1)\cdot R(\mu,T)|| =$

$\sup_{i\in I} \sup_{\mu\in A} ||(\mu - 1)\cdot R(\mu,T_i)|| = \sup_{i\in I} M_i < \infty.$

Dies zeigt, daß 1 Pol der Ordnung $n \leq 1$ von $R(\mu,T)$ ist und da $r(T) = 1$ vorausgesetzt wurde, ist die Polordnung $n = 1$.

Lemma. Sei $E = C(X)$ und T ein radikalfreier Sub-Markoff-Operator auf E. Für jedes $\mu \in \rho_\infty(T)$ gilt dann $||R(\mu,T)|| = \sup_{i\in I} ||R(\mu,T_i)||$.

Beweis. Zunächst ist nach [21], 3.Cor.1 die Beziehung $||R(\mu,T_i)|| \leq ||R(\mu,T)||$ für jedes $i \in I$ gültig. Ist $\{J_i : i \in I\}$ die Menge der maximalen T-Ideale, so folgt mit [24], IV.1.5, Cor.2 aus $\{0\} = \bigcap_{i\in I} J_i$ die Gleichung $E' = (\bigcup_{i\in I} J_i^\circ)^{\circ\circ}$, wobei die Polarenbildung bezüglich der kanonischen Dualität $\langle E,E'\rangle$ zu verstehen ist. Also ist die Vereinigung der Polaren J_i° $(i \in I)$ dicht in E' für die Topologie $\sigma(E',E)$.
Nun sei $\mu \in \rho_\infty^{\sim}(T)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Es gibt dann $x \in E$ mit $||x|| = 1$ und $||R(\mu,T)x|| \geq ||R(\mu,T)|| - \varepsilon$. Nach dem oben Gesagten und dem Satz von Hahn-Banach existiert ein $i_o \in I$ und ein $\phi \in J_{i_o}^\circ$, $||\phi|| = 1$, mit

$$\langle R(\mu,T)x,\phi\rangle \geq ||R(\mu,T)x|| - \varepsilon \geq ||R(\mu,T)|| - 2\varepsilon.$$

Da E_{i_o}' isometrisch isomorph mit $J_{i_o}^\circ \subset E'$ ist, ergibt diese Ungleichung folgende Abschätzung (wobei mit x_i das kanonische Bild von x unter der Quotientenabbildung $E \to E_i$ verstanden wird):

$$||R(\mu,T_{i_o})x_{i_o}|| = ||R(\mu,T_{i_o})x_{i_o}||\cdot||\phi|| \geq$$

$$\geq \langle R(\mu,T_{i_o})x_{i_o},\phi\rangle = \langle R(\mu,T)x,\phi\rangle \geq ||R(\mu,T)|| - 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, liefert dies die gewünschte Beziehung $\sup_{i\in I} ||R(\mu,T_i)|| \geq ||R(\mu,T)||$. Damit ist die Behauptung des Lemmas bewiesen.

Nunmehr sind die Voraussetzungen geschaffen, um das folgende Resultat (5.13) zu beweisen.

5.13 Satz. Sei $E = C(X)$, S und T seien Markoff-Operatoren auf E mit $S \leq cT$ für ein $c \in \mathbb{R}$, und 1 sei Pol von $R(\mu,S)$. Gilt für das S-Radikal R_S und das T-Radikal R_T die Inklusion $R_T \subset R_S$ und gibt es zu jedem maximalen T-Ideal J maximale S-Ideale $H_1,\dots,H_r$ ($r \in \mathbb{N}$) mit $J \supset \bigcap_{i=1}^{r} H_i$, so sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(a) 1 ist isoliert in $\sigma(T)$.

(b) 1 ist Pol von $R(\mu,T)$.

Beweis. Die Implikation (b)$\Rightarrow$(a) ist klar, und so genügt es, (a)$\Rightarrow$(b) zu beweisen. Zunächst soll gezeigt werden, daß $r(T|_{R_T}) < 1$ gilt. Da S die Markoff-Eigenschaft besitzt, ist 1 Pol erster Ordnung von $R(\mu,S)$ (nach (2,8)), d.h. S ist gleichmäßig mittel-ergodisch. Nach dem Theorem 4 nachfolgenden Lemmma in [26] hat dies $r(S|_{R_S}) < 1$ zur Folge, und (2.6) liefert so $r(S|_{R_T}) < 1$. Hieraus folgt nun $r(T|_{R_T}) < 1$ mit Lemma (5.11). Um schließlich (5.12) anwenden zu können, ist noch zu zeigen, daß für jedes maximale T-Ideal J_i ($i \in I$) $\mu = 1$ Pol der Ordnung $n_i \leq 1$ von $R(\mu,T_i)$ ist.

Ist nun $i \in I$ gegeben, so werden auf $E_i = E/J_i = C(X_i)$ (X_i kompakt) die durch T und S induzierten Markoff-

Operatoren T_i und S_i betrachtet. Nach Voraussetzung gibt es maximale S-Ideale $H_1,\dots,H_r$ ($r \in \mathbb{N}$) mit

$$J_i \supset H := \bigcap_{j=1}^{r} H_j .$$

Der Quotientenoperator S_j ist irreduzibel auf E/H_j für alle j, $1 \le j \le r$ ([27], III.8.2 Cor.). Wegen $E/H = \oplus_{j=1}^{r} E/H_j$ (siehe (2.13)) ist E/H also die direkte Summe von r paarweise disjunkten minimalen S_H-Idealen. Dann ist aber E_i die direkte Summe von q paarweise disjunkten minimalen S_i-Idealen, wobei $q \le r$ gilt. Um dies zu zeigen, wird die Abbildung

$$\phi : E_H \to E_i = E/J_i : x+H \to x+J_i$$

betrachtet: ϕ ist ein surjektiver Verbandshomomorphismus, denn es gilt

$$|\phi(x+H)| = |x+J_i| = |x| + J_i = \phi(|x|+H) = \phi|x+H|$$

für alle $x \in E$. Nach [27], II.2.5 ist daher $L_j := \phi(K_j)$ ein S_i-Ideal für $j = 1,\dots,r$, wenn hier $\{K_j : j = 1,\dots,r\}$ die Menge der minimalen S_H-Ideale bezeichnet.

Aus $L_k \cap L_j \neq \{0\}$ folgt nun $L_k = L_j$: seien $0 \neq x \in K_k$, $0 \neq y \in K_j$ mit $\inf\{\phi|x|, \phi|y|\} > 0$. Dies bedeutet

$\phi(\inf\{|x|,|y|\}) = \inf\{\phi|x|,\phi|y|\} > 0$, also

$0 < \inf\{|x|,|y|\} \in K_k \cap K_j$

und damit $K_k = K_j$. Die Numerierung kann nun so gedacht werden, daß $L_j \neq \{0\}$ gilt für $1 \leq j \leq q$, $q \leq r$, also E_i die direkte Summe von L_j, $1 \leq j \leq q$, ist. Die Minimalität von L_j kann so eingesehen werden: ist $\{0\} \neq L$, $L \subset L_j$ ein L_i-Ideal und $\phi^{-1}(L) \cap K_k \neq \{0\}$ für $1 \leq k \leq r$, so folgt $K_k \subset \phi^{-1}(L)$ aus der Minimalität von K_k und somit $L_k = \phi(K)_k \subset \phi(\phi^{-1}(L)) = L \subset L_j$, also $j = k$ und $L = L_j$.

Nach einem Satz von Niiro und Sawashima ([27], V.5.4) besteht für jedes k, $1 \leq k \leq q$, das periphere Spektrum von $S_{i|L}$ aus Polen erster Ordnung, und deren Residuen sind überdies eindimensional ([27], V.5.2). Also besteht wegen $E_i = \oplus_{k=1}^{q} L_k$ auch das periphere Spektrum von S_i aus lauter Polen erster Ordnung mit endlichdimensionalen Residuen. Dies zeigt aber die Quasikompaktheit von S_i (vgl. [27], V.5.4 Cor.), und nach (5.10) ist somit auch T_i quasikompakt. Insbesondere ist also 1 Pol von $R(\mu,T_i)$ und wegen der Irreduzibilität von T_i ist die Polordnung $n_i = 1$ ([27], V.5.1 Cor.). Damit kann nun (5.12) angewendet werden, und dies bedeutet, daß 1 Pol erster Ordnung von $R(\mu,T)$ ist.

Bemerkung. Die an die betreffenden invarianten Ideale und die Radikale von T und S gestellten Bedingungen sind etwa dann erfüllt, wenn T jedes maximale S-Ideal invariant läßt, also z.B. im Falle $T \leq dS$, $d \in \mathbb{R}$.

5.14 Korollar. Sei $E = C(X)$, S und T seien Markoff-Operatoren auf E, welche $S \leq cT \leq dS$ mit reellen Zahlen c und d erfüllen. Ist 1 Pol von $R(\mu,S)$ und isoliert in $\sigma(T)$, dann ist 1 auch Pol von $R(\mu,T)$.

An einem Beispiel soll abschließend noch gezeigt werden, daß die Aussage von (5.13) in folgendem Sinne keine Tautologie ist: es gibt Operatoren S und T, welche die Voraussetzungen von (5.13) erfüllen, aber doch so, daß die äquivalenten Aussagen (a) und (b) nicht eintreten. Sei hierzu $E := l^\infty = C(\beta\mathbb{N})$, $S = Id$ und T der durch die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ & & 2/3 & 1/3 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & 3/4 & 1/4 & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & 4/5 & 1/5 \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

definierte Operator. S und T sind Markoff-Operatoren mit $S \leq 2T$, 1 ist Pol von $R(\mu,S)$, jedoch nicht von $R(\mu,T)$; denn 1 ist nicht isoliert in $\sigma(T)$, da $n/(n+1) \in p\sigma(T)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. S und T sind offensichtlich radikalfrei ($R_S = R_T = \{0\}$). Um das Erfülltsein der

restlichen Voraussetzungen zu zeigen, gehen wir aus von der Gestalt eines beliebigen maximalen S-Ideals, nämlich $J := \{(a_n) \in l^\infty : \lim_{\mathcal{U}} a_n = 0\}$ für einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\mathbb{N}$ (vgl. [27], III.1.Ex.1; $\beta\mathbb{N}$ wird hier identifiziert mit der Menge aller Ultrafilter auf $\mathbb{N}$). Für jeden freien Ultrafilter $\mathcal{U}$ ($\bigcap_{F\in\mathcal{U}} F = \emptyset$) ist J invariant unter T und damit maximales T-Ideal. Für alle weiteren maximalen T-Ideale $J_A = \{f \in C(\beta\mathbb{N}) : f(A) \subset \{0\}$ für A abgeschlossen $\subset \beta\mathbb{N}\}$ gilt also $A \subset \mathbb{N}$. Nach Definition von T ist dann jedes solche A zweielementig, $A = \{m,m+1\}$, weshalb dann J_A gerade gleich dem Durschnitt der maximalen S-Ideale $J_m := \{(a_n) \in l^\infty : a_m = 0\}$ und $J_{m+1} := \{(a_n) \in l^\infty : a_{m+1} = 0\}$ ist.

6. FOLGERUNGEN FÜR DAS ASYMPTOTISCHE VERHALTEN DES MAJORISIERENDEN OPERATORS

Maßtheoretische und topologische dynamische Systeme können auch funktionalanalytisch betrachtet werden. So wird zum Beispiel statt der Wirkung einer Abbildung ϕ auf einer Menge X der durch $T_\phi f(t) := f(\phi(t))$ auf einem geeigneten Funktionenraum über X definierte Operator untersucht. Die Langzeitentwicklung des Systems (X,ϕ) spiegelt sich dann wieder in Konvergenz-Eigenschaften der Potenzen T^n oder der gemittelten Potenzen (Cesaro-Mittel) $T_n := 1/n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} T^k$. Einige dieser Eigenschaften nun werden charakterisiert durch das Spektralverhalten des Operators T und zwar in Bezug auf das periphere Spektrum. Die in den vorigen Abschnitten gewonnenen Ergebnisse legen es daher nahe, nach ihren Auswirkungen im Bereich des asymptotischen Verhaltens positiver Operatoren zu fragen. In der Tat lassen sich aus den bisherigen Resultaten einige direkte Schlußfolgerungen bezüglich Konvergenzfragen ziehen. Das soll in diesem abschließenden Kapitel geleistet werden.

Wir betonen allerdings, daß es sich hier nur um unmittelbare Folgerungen aus dem Vorangehenden handelt, sozusagen um die Wirkung der bisherigen Resultate anzudeuten. Es ist also keine systematische Untersuchung des Konvergenzverhaltens des majorisierenden Operators beabsichtigt, weshalb z.B. der Fall der Konvergenz der Potenzen bzgl.

der starken Operatortopologie außer Betracht gelassen wird (da diese Konvergenzart bisher nicht durch spektraltheoretische Eigenschaften charakterisiert wurde).

Die folgenden Begriffsbildungen werden dazu kurz noch erklärt (siehe [17]): E sei ein Banachverband und T ein positiver Operator auf E. Dann heißt T mittel-ergodisch, falls die Cesaro-Mittel $T_n := 1/n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} T^k$ in der starken Operatortopologie gegen eine Projektion P konvergieren (vgl. [30], "Remark" Seite 93), und gleichmäßig mittel-ergodisch, falls Konvergenz sogar in der Operatornorm vorliegt. Wie in (2.9) bereits bemerkt, ist im Falle $r(T) = 1$ die letztere Eigenschaft äquivalent dazu, daß 1 Pol erster Ordnung von $R(\mu,T)$ ist.

Weiter heißt T schwach mischend, wenn P die Gestalt $\mu \otimes u$ für einen quasi-inneren Fixpunkt u von T und eine unter T' invariante, strikt positive Linearform μ besitzt und im Abschluß F von $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ bezüglich der schwachen Operatortopologie enthalten ist. Wird E als separabel mit ordnungsstetiger Norm und $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ als gleichstetig vorausgesetzt, so ist F sogar metrisierbar, und daher existiert dann eine Folge natürlicher Zahlen $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ derart, daß T^{n_i} in der schwachen Operatortopologie gegen P konvergiert.

Schließlich wird T stochastisch genannt, falls für alle $x \in E_+$ $||Tx|| = ||x||$ gilt.

Unser erstes Resultat betrifft den Fall der gleichmäßigen Mittel-Ergodizität.

6.1 Satz. Sei (X,Σ,μ) ein σ-endlicher Maßraum und $E = L^1(X,\Sigma,\mu)$. S und T seien stochastische Operatoren auf E mit $0 \leq S \leq cT$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Ist S gleichmäßig mittel-ergodisch mit endlichdimensionalem Fixraum, so folgt dies auch für T, und es gilt die Ungleichung $\dim F(T) \leq \dim F(S)$ für die Dimensionen der Fixräume.

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen kann E' mit $L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ identifiziert werden, nach [27], II.7.4 also mit einem Raum $C(K)$, wobei K einen kompakten Hausdorff-Raum bezeichnet. Die Tatsache, daß S und T als stochastisch vorausgesetzt werden, bedeutet dann gerade für S' und T' die Markoff-Eigenschaft. Insbesondere ist damit $r(S) = r(T) = 1$.
Nach dem oben Gesagten ist also 1 Pol erster Ordnung von $R(\mu,S)$, und daher ist das Residuum von $R(\mu,T)$ in $\mu = 1$ von endlichem Rang. Nach [27], V.5.5 besteht also $\pi\sigma(T)$ aus lauter Polen erster Ordnung. Deren Eigenräume sind nach [10], Theorem 2 ebenfalls endlichdimensional, und daher sind die zugehörigen Residuen von endlichem Rang. Also ist S und damit auch S' quasikompakt. Mit (5.9) folgt hieraus die Quasikompaktheit von T' und T. Somit ist 1 Pol von $R(\mu,T)$ und nach (2.9) von erster Ordnung. Diese Eigenschaft schließlich ist äquivalent zur gleichmäßigen Mittel-Ergodizität von T ((2.12)). Die

Ungleichung für die Dimensionen der Fixräume ergibt sich nun aus (4.1) oder (4.3).

Bemerkung. Die Behauptung von (6.1) wird falsch, falls dim F(S) nicht als endlich vorausgesetzt wird. Ist nämlich $E := l^1$, S die Identität auf E und T der durch

$$\begin{bmatrix} 1/2 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ & 1/2 & 1/2 & & \\ & & 1/2 & 1/2 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

definierte stochastische Operator, so ist S natürlich gleichmäßig mittel-ergodisch, nicht dagegen T, denn 1 ist nicht isoliert in $\sigma(T) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - 1/2| \leq 1/2\}$.

Als nächstes nun wird der Fall der Normkonvergenz der Potenzen behandelt.

6.2 Satz. Sei (X,Σ,μ) ein σ-endlicher Maßraum und $E := L^1(X,\Sigma,\mu)$. S und T seien stochastische Operatoren auf E mit $0 \leq S \leq cT$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Falls $(S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Operatornorm gegen eine Projektion endlichen Ranges konvergiert, dann besitzt $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dieselbe Eigenschaft, und es gilt dim F(T) $\leq$ dim F(S) für die Dimensionen der Fixräume.

Beweis. Da $(S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Operatornorm konvergiert, ist S gleichmäßig mittel-ergodisch, und nach Voraussetzung ist $F(S)$ endlichdimensional. Nach (2.12) ist damit 1 Pol erster Ordnung von $R(\mu,S)$, und deshalb besteht nach [27], V.5.5 $\pi\sigma(S)$ aus lauter Polen erster Ordnung. Die Konvergenz von $(S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ liefert daher $\pi\sigma(S) = \{1\}$.

Zunächst ist nach (6.1) auch T gleichmäßig mittel-ergodisch mit $\dim F(T) \leq \dim F(S)$, also 1 Pol von $R(\mu,T)$, und daher besteht auch $\pi\sigma(T)$ aus lauter Polen. Mit (3.2) folgt so

$$\pi\sigma(T) = \pi p\sigma(T) \subset \pi\sigma(S) = \{1\},$$

also $\pi\sigma(T) = \{1\}$. Da 1 sogar Pol erster Ordnung von $R(\mu,T)$ ist, kann E als direkte Summe von zwei unter T invarianten Teilräumen F und G zerlegt werden, wobei $F = F(T)$ der Fixraum von T ist. Unter der Annahme $r(T_{|G}) = 1$ ergäbe sich $\pi\sigma(T_{|G}) \subset \pi\sigma(T) = \{1\}$ aus (2.2), also $\pi\sigma(T_{|G}) = 1$. Aber 1 kann nicht in $\sigma(T_{|G})$ liegen; denn sonst wäre 1 nach [27], V.5.3 Pol erster Ordnung von $R(\mu,T_{|G})$, also läge in G ein Fixvektor von T, was wegen $F(T) \cap G = \{0\}$ nicht der Fall sein kann. Also folgt $r(T_{|G}) < 1$, und somit konvergiert $((T_{|G})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der Operatornorm gegen 0. Hieraus ergibt sich die Konvergenz von $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Das in der Bemerkung zu (6.1) angeführte Beispiel zeigt, daß auch in (6.2) nicht darauf verzichtet werden kann, den Fixraum von S als endlichdimensional vorauszusetzen. Es sei aber darauf hingewiesen, daß (6.1) und (6.2) den Fall der Irreduzibilität von S enthalten, denn der Fixraum von S ist dann eindimensional ([27], V.5.2). Allerdings läßt sich aus (3.12) noch diese einfache Folgerung ziehen, bei welcher die Voraussetzung "dim $F(S) < \infty$ " nicht benötigt wird.

6.3 Satz. Sei (X,Σ,μ) ein σ-endlicher Maßraum und $E := L^1(X,\Sigma,\mu)$. S und T seien stochastische Operatoren auf E mit $0 \leq S \leq cT$ für ein $c \in \mathbb{R}$, und T sei gleichmäßig mittel-ergodisch. Konvergiert $(S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Operatornorm, dann besitzt auch $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diese Eigenschaft.

Beweis. Satz (3.12) läßt sich hier auf E', S' und T' anwenden, und es ergibt sich $\pi\sigma(T') \subset \pi\sigma(S') = \{1\}$. Wie im Beweis von (6.2) folgt so die Normkonvergenz von $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Schließlich soll jetzt noch auf den Fall des schwachen Mischens eingegangen werden.

6.4 Satz. Sei (X,Σ,μ) ein σ-endlicher Maßraum und $E := L^1(X,\Sigma,\mu)$. S und T seien stochastische Operatoren auf E mit quasi-inneren Fixpunkten, und es sei S in dem von T in $\mathscr{L}^r(E)$ erzeugten Band enthalten. Falls S schwach mischend ist, so folgt dies auch für T.

Beweis. Nach [27], V. Exc.14 wird schwaches Mischen von S charakterisiert durch Irreduzibilität von S und die Beziehung $\pi p\sigma(\check{S}) = \{1\}$. Um zunächst die Irreduzibilität von T zu beweisen, wird ein T-Ideal $J \subset E$ betrachtet. Nach [27], III.10.2;II.8.3;II.5.11 ist J sogar ein Band in E. Die Voraussetzung ergibt die Existenz einer gerichteten Familie positiver Operatoren $(S_i)_{i\in A}$ in dem von T erzeugten Ideal mit $Sx = \sup_{i\in A} S_i x$ für alle $x\in E_+$ ([27], Beweis von IV.1.3). Ist also $x \in J_+$ gegeben, so liegt $S_i x$ in J (da S_i in dem von T erzeugten Ideal enthalten ist) für alle $i \in A$, und wegen der Band-Eigenschaft von J gilt dies dann auch für Sx. Unter Beachtung von $J = J_+ - J_+$ folgt hieraus $SJ \subset J$ und mit der Irreduzibilität von S daher $J \in \{0,E\}$. Damit ist die Irreduzibilität von T gezeigt, und die Anwendung von (3.3) auf die vorliegende Situation liefert $\pi p\sigma(T) = \{1\}$. Also ist, wiederum nach [27], V. Exc.14, T schwach mischend.

LITERATUR

[1] Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O.: Positive compact operators on Banach lattices. Math. Z. 174, 289-298 (1980).

[2] Axmann, D.: Struktur- und Ergodentheorie irreduzibler Operatoren auf Banachverbänden. Dissertation. Tübingen 1980.

[3] Berman, A., Plemmons, R.J.: Nonnegative matrices in the mathematical sciences. New York, San Francisco, London: Academic Press 1979.

[4] Bourbaki, N.: Intégration, chap. V.2^{me} édition revue et corrigée. Paris: Hermann 1967.

[5] Dunford, N., Schwartz, J.T.: Linear Operators. Part I: General Theory. New York: Interscience Publishers (Wiley) 1958.

[6] Hille, E., Phillips, R.S.: Functional Analysis and Semi-Groups. Revised Edition. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. XXXI, 1957.

[7] Karlin, S.: Positive Operators. J. Math. Mech. 8, 907-937 (1959).

[8] Karlin, S.: A First Course in Stochastic Processes. New York, London: Academic Press 1966.

[9] Kato, T.: Perturbation Theory for Linear Operators. 2nd ed., Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976.

[10] Lin, M.: Quasi-compactness and uniform ergodicity of positive operators. Israel J. Math. 29, 309-311 (1978).

[11] Lotz, H.P.: Über das Spektrum positiver Operatoren. Math. Z. 108, 15-32 (1968).

[12] Lotz, H.P.: Uniform ergodic theorems for Markov operators on C(X). Math. Z. 178, 145-156 (1981).

[13] Marek, I.: On some spectral properties of Radon-Nikolskii operators and their generalizations. Comment. Math. Univ. Carol. 3,1 , 20-30 (1962).

[14] Marek, I.: Frobenius theory of positive operators: comparison theorems and applications. SIAM J. Appl. Math. 19, 607-628 (1970).

[15] Miyajima, S.: A reduction of Banach lattices and its applications to positive ergodic operators. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I A, 27, 321-330 (1980).

[16] Moustakas, U.: Zur Störungstheorie positiver Matrizen. Diplomarbeit. Tübingen 1981.

[17] Nagel, R.J.: Ergodic and mixing properties of linear operators. Proc. R. Ir. Acad. 74 A, 245-261 (1974).

[18] Richman, D.J., Schneider, H.: On the singular graph and the Weyr characteristic of an M-matrix. Aequat. Math. 17, 208-234 (1978).

[19] Rickart, Ch.E.: General Theory of Banach Algebras. Princeton: Van Nostrand 1960.

[20] Rothblum, U.G.: Algebraic eigenspaces of nonnegative matrices. Lin. Alg. Appl. 12, 281-292 (1975).

[21] Sawashima, I., Niiro, F.: Reduction of a sub-Markov operator to its irreducible components. Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 24, 35-59 (1973).

[22] Sawashima, I., Niiro, F.: A reduction of a positive operator in an arbitrary Banach lattice to its irreducible components. Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 30, 11-16 (1979).

[23] Schaefer, H.H.: Some spectral properties of positive linear operators. Pacific J. Math. 10, 1009-1019 (1960).

[24] Schaefer, H.H.: Topological Vector Spaces. 1st,2nd print New York-London: Macmillan 1966, 1967. 3rd print Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971.

[25] Schaefer, H.H.: Invariant ideals of positive operators in C(X). I. Illinois J. Math. 11, 703-715 (1967).

[26] Schaefer, H.H.: Invariant ideals of positive operators in C(X). II. Illinois J. Math. 12, 525-538 (1968).

[27] Schaefer, H.H.: Banach Lattices and Positive Operators. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974.

[28] Scheffold, E.: Das Spektrum von Verbandsoperatoren in Banachverbänden. Math. Z. 123, 177-190 (1971).

[29] Seneta, E.: Non-Negative Matrices. An Introduction to Theory and Applications. New York: Halsted Press (Wiley) 1973.

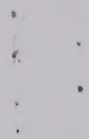
[30] Takeo, F.: On proper spaces of some positive operators with the property (W). Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 27(2), 89-97 (1976).

[31] Taylor, A.E., Lay, D.C.: Introduction to Functional Analysis. 2nd ed., New York, Chichester, Brisbane, Toronto: John Wiley & Sons 1980.

Lebenslauf

Am 12. März 1956 wurde ich, Ulrich Moustakas, als Sohn des Athanasios Moustakas und seiner Ehefrau Marianne, geb. Hegelau, in Schwäbisch Gmünd geboren. Dort besuchte ich von April 1963 bis November 1966 die Volksschule. Im Dezember 1966 wechselte ich dann ins Parler-Gymnasium, wo ich im Juni 1975 das Abitur absolvierte.

Das Studium der Mathematik begann ich im Wintersemester 1975/76 an der Eberhard-Karls-Universität in Tübingen. Im Oktober 1977 bestand ich dort das Vordiplom und im Januar 1982 die Diplomprüfung in Mathematik mit Physik im Nebenfach.

Von 1975 bis 1980 war ich Stipendiat der Studienstiftung des Deutschen Volkes und von August 1983 bis Juli 1984 Wissenschaftlicher Angestellter an der Mathematischen Fakultät der Universität Tübingen.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren
W. Beekmann, G. Betsch, W. Grölz, H. Kaul, R.J. Nagel, H.H. Schaefer, U. Schlotterbeck, A. Schönhage, E. Siebert in Mathematik und M. Baumann, F. Gönnenwein, E. Kasper, F. Lenz in Physik.